

[5]\* Théorème  $\sqrt{2}$  est irrationnelDémonstration

Il s'agit de montrer que  $\sqrt{2}$   
ne peut pas s'écrire sous forme  
d'une fraction

Supposons que ce soit le cas :

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  avec  $p$  entier relatif  
et cette fraction irréductible.  $q$  entier relatif, non nul

Mais, allons voir que nous aboutissons  
à une absurdité !!!

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$$\Rightarrow p^2 \text{ est pair}$$

$$\Rightarrow p \text{ est pair}$$

$$\Rightarrow p = 2k \text{ avec } k \text{ entier relatif}$$

$$\Rightarrow 2q^2 = (2k)^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

$$\Rightarrow q^2 \text{ pair}$$

$$\Rightarrow q \text{ pair}$$

$$\Rightarrow q = 2\ell \text{ avec } \ell \text{ entier relatif}$$

$$\text{Donc } \sqrt{2} = \frac{2k}{2\ell}$$

n'est pas irréductible

C'est absurde !!!

Il est donc impossible que  $\sqrt{2}$   
puisse s'écrire comme une fraction

qfd