Equations du deuxième degré

Quoi ?

Définition

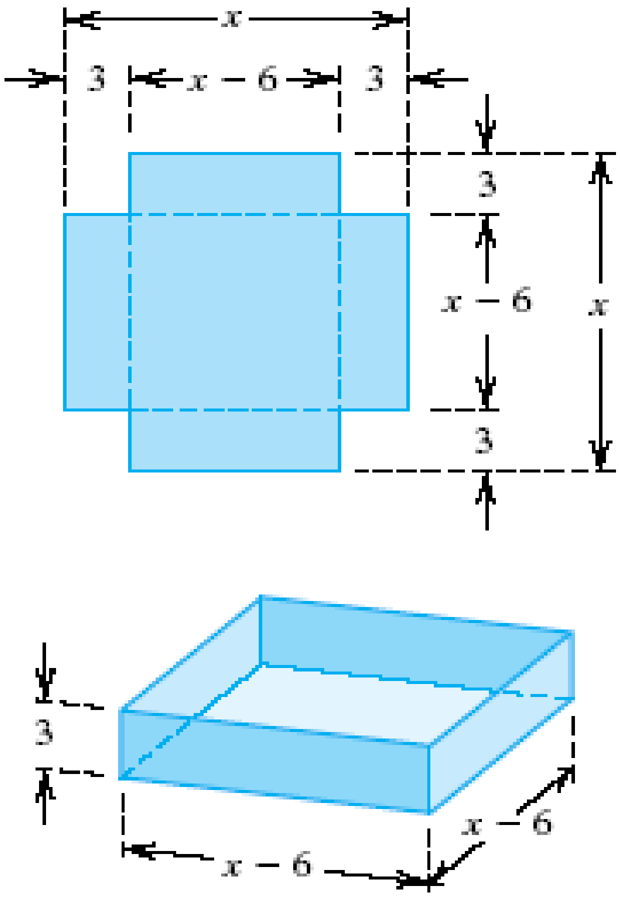
Une **équation du deuxième degré** est une équation polynomiale *p(x)=q(x)* telle que le degré de *p(x)-q(x)* est égal à 2. Elle est toujours équivalente à une équation de la forme $ax^2+bx+c = 0$, où x est une **variable** réelle et *a*, *b* et *c* sont des **constantes** réelles $(a \neq 0)$

Exemples

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2-3=-3x^2+x-1 \\ \pi x^2-3\cdot\sqrt{2}+x=1 \end{array}\right\} \text{ sont des équations du 2e degré}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2-1}=2 \\ \pi x^3-3\cdot\sqrt{2}+x=1 \end{array}\right\} \text{ ne sont pas des équations du 2e degré}$$

Pourquoi ?



Certains problèmes conduisent à devoir résoudre une telle équation :
«On veut faire une boîte ouverte de base carrée à partir d'un morceau de métal carré, en coupant à chaque coin un carré de 3 cm de côté et en pliant les côtés.
De quelle taille doit être le morceau de métal pour que la boîte ait un volume de 48 cm3 ?»

L'équation est alors : $3(x-6)^2=48$

équivalente à: $x^2-12x+18=0$

Résoudre une équation du deuxième degré

Comment ?

Cas particulier (ou équivalent) ?

$x^2 = a$ (*pas de terme en* x)

oui

Si $a \geq 0$: $S = \{-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}\}$

Si $a < 0$: $S = \emptyset$

non

Cas général ...

1. on écrit l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

2. On essaye de factoriser ...

Viète avec $\Delta = b^2 - 4ac$ pour conclure

On utilise le thm du produit nul pour conclure :

$$y \cdot z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } z = 0$$

si $\Delta > 0$

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

si $\Delta = 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

si $\Delta < 0$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution

Remarque : on peut du coup aussi factoriser une expression de degré 2 :

l'expression $ax^2 + bx + c$ est factorisable

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

l'expression $ax^2 + bx + c$ est factorisable

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

l'expression $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable

Résoudre une équation du deuxième degré

Exemples

1

$$\begin{aligned} 2x^2-8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$x=-2 \text{ ou } x=2$$

$$S=\{-2;2\}$$

2

$$2x^2-4x=x^2+x-6$$

-x²-x+6

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)=0 \text{ ou } (x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ou } x=3$$

$$S=\{2;3\}$$

3

$$2x^2-4x=x^2+x-5$$

-x²-x+5

$$\Leftrightarrow x^2-5x+5=0$$

$$a=1 \ , \ b=-5 \ , \ c=5$$

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{5}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$S=\left\{\frac{5-\sqrt{5}}{2};\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Factoriser une expression du deuxième degré

Exemples

1

$$2x^2-8 = 2(x^2-4) = 2(x-2)(x+2)$$

2

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

3

$6x^2-x-2$:

$a=6\ ,\ b=-1\ ,\ c=-2$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot6\cdot(-2)=49$

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{2\cdot6}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{1\pm7}{12}$$

$$x_1=\frac{1-7}{12}=-\frac{1}{2}\ ;\ x_2=\frac{1+7}{12}=\frac{2}{3}$$

$$6x^2-x-2=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=6\left(\frac{2x+1}{2}\right)\left(\frac{3x-2}{3}\right)=(2x+1)(3x-2)$$

4

$6x^2-x+2$:

$a=6\ ,\ b=-1\ ,\ c=-2$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot6\cdot2=-47$

$6x^2-x+2$ n'est pas factorisable