Outils de base de la géométrie euclidienne

Etape 1 :

Notions fondamentales	plan, points, (sous)-ensembles de points, appartenance, union, intersection
	droite, demi-droite, segment, surface
Définitions	angle, Déf «α plein», Déf «α plat», Déf «α plat»
	Déf «α compl», Déf «α suppl», Déf «α opp», Déf «α corr», Déf «α alt-int»
	distance entre deux points, longueur, aire, mesure d'un angle
	droites sécantes, parallèles (Déf «dr. par.»), perpendiculaires (Déf «dr. perp.»)

5 axiomes initiaux	*Ax1- Ax2- Ax3- Ax4- Ax5 : …*

Axiome	Ax «α corr»

Théorèmes	Thm «α opp»	«Thm α alt-int»

Etape 2 :

Définitions	triangle, côtés opposés / Déf «Δ rectangle» / Déf «Δ isocèle» / Déf «Δ équilatéral»
polygone, côtés, sommets / quadrilatère (carré, rectangle, losange, parallélogramme, trapèze)	

Théorèmes non démontrés	Thm «Aires»	Thm «côtés parallélogr.»
	Thm «Δ isocèle»	Thm «Δ équilatéral»

Théorèmes	Thm «ΣαΔ=180»

…

Outils de base de la géométrie euclidienne

Etape 3 :

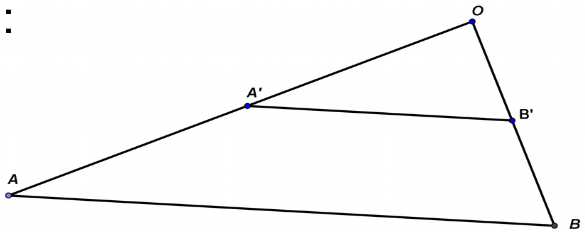
Définitions	Déf «Δ semblables» / Déf «côtés corr»

...

Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Thalès (2e forme)

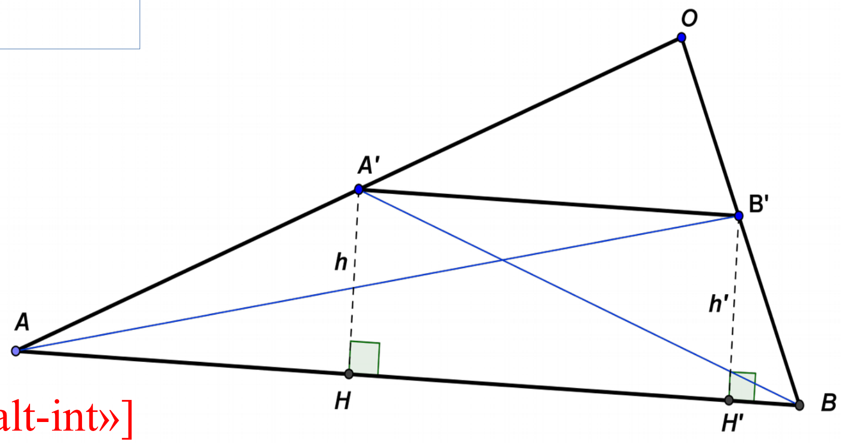
Dans la situation ci-contre :



si $[AB] \parallel [A'B']$

alors $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Démonstration :



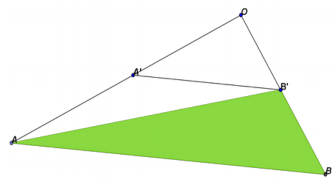
Première étape : on considère les triangles $\Delta ABB'$ et $\Delta ABA'$

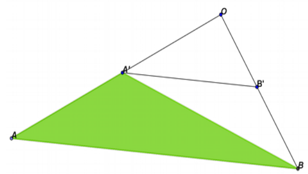
- on construit les perpendiculaires à $[AB]$ passant par A' et B'
  on note H et H' leurs intersections avec $[AB]$
  et on s'intéresse aux longueurs h et h' [idée !]
- on a : $<A'HH' = <B'H'B$ sont alternes-internes [par Déf « α alt-int»]

  et aussi : $<AHA' = <A'HH' = <HH'B' = <B'H'B = 90°$ [par Déf «perp»]

  donc $[A'H]$ est parallèle à $[B'H']$ [par Thm « α alt-int»]
- par ailleurs, $[AB]$ est parallèle à $[A'B']$ [par hypothèse]
- donc $HH'B'A'$ est un parallélogramme [par Déf «rect»]

  et $h=h'$ [par Thm «côtés parallélogramme»]





- on calcule les aires :
  $Aire(\Delta ABB')=\dfrac{h\cdot\overline{AB}}{2}$ et $Aire(\Delta ABA')=\dfrac{h\cdot\overline{AB}}{2}$ [par Thm « Aire Δ»]

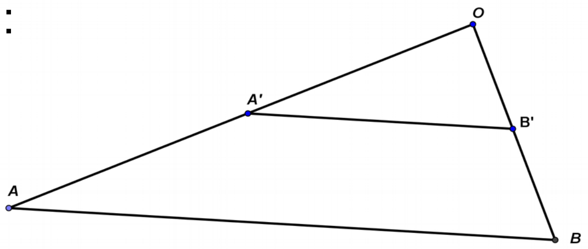
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Thalès (2e forme)

Dans la situation ci-contre :

si $[AB] \parallel [A'B']$

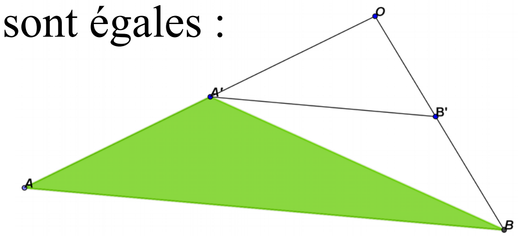
alors $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

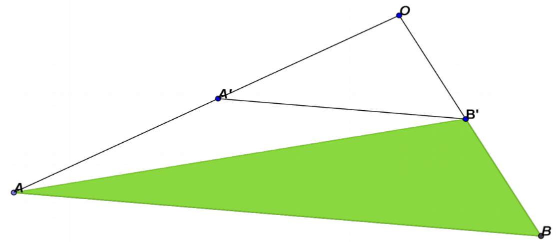


<u>Démonstration :</u>

Première étape (suite)

- on a donc montré que les aires vertes sont égales :





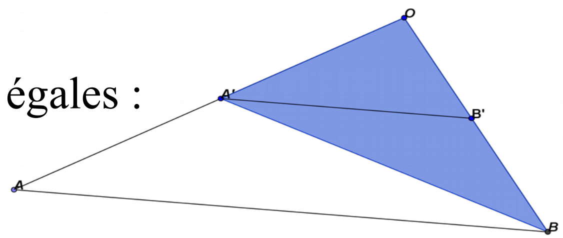
- on a : $\text{Aire}(\Delta OAB) = \text{Aire}(\Delta A'AB) + \text{Aire}(\Delta O'A'B)$

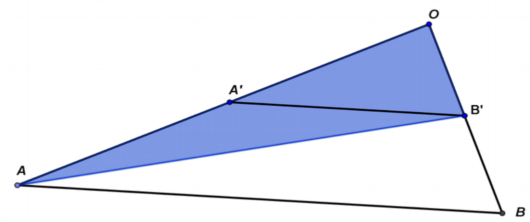
  d'où $\text{Aire}(\Delta OA'B) = \text{Aire}(\Delta OAB) - \text{Aire}(\Delta A'AB)$

  $= \text{Aire}(\Delta OAB) - \text{Aire}(\Delta B'AB)$

  $= \text{Aire}(\Delta OAB')$

  c'est-à-dire que les aires bleues sont aussi égales :





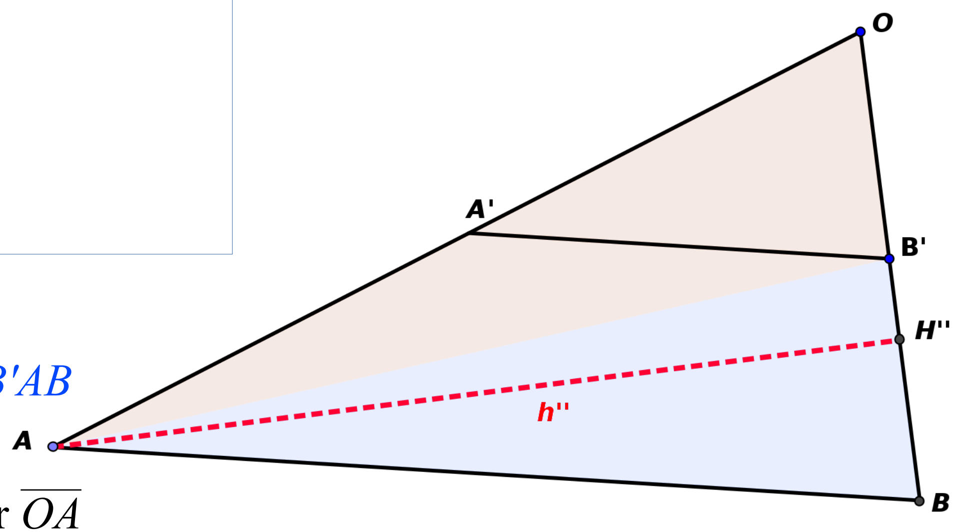
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Thalès (2e forme)

Dans la situation ci-contre :

si $[AB] \parallel [A'B']$

alors $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$



Démonstration :

Deuxième étape : on considère les triangles $\Delta OAB'$ et $\Delta B'AB$

- on construit la perpendiculaire à $[OB]$ passant par A
  on note H'' son intersection avec $[OB]$ et h'' la longueur $\overline{OA}$
  [idée !]
- on a : $Aire(\Delta AB'O)=\frac{h''\cdot\overline{B'O}}{2}$ et $Aire(\Delta ABB')=\frac{h''\cdot\overline{BB'}}{2}$
  [par Thm « Aire Δ»]
- d'où on déduit : $\frac{h''}{2}=\frac{Aire(\Delta AB'O)}{\overline{B'O}}=\frac{Aire(\Delta ABB')}{\overline{BB'}}$
  [diviser les égalités par $\overline{B'O}$ et $\overline{BB'}$ puis comparer]
- et enfin : $\frac{Aire(\Delta AB'O)}{Aire(\Delta ABB')}=\frac{\overline{B'O}}{\overline{BB'}}$
  [diviser par Aire($\Delta ABB'$) et multiplier par $\overline{B'O}$]

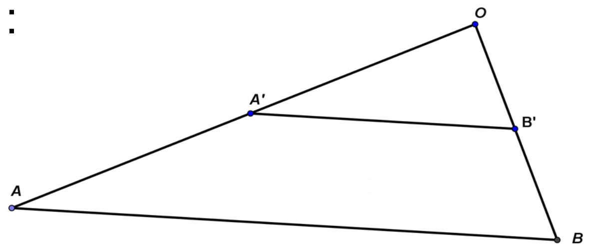
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Thalès (2e forme)

Dans la situation ci-contre :

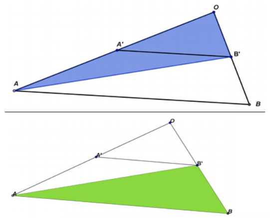
si $[AB] \parallel [A'B']$

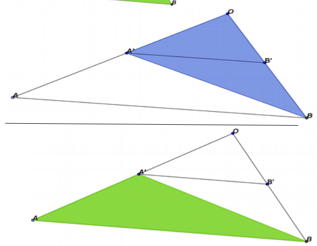
alors $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$



Démonstration :

Deuxième étape (suite)

- c'est-à-dire : $\dfrac{\overline{B'O}}{\overline{BB'}} =$ 

- identiquement : $\dfrac{\overline{A'O}}{\overline{AA'}} =$ 

- et ainsi : $\dfrac{\overline{B'O}}{\overline{BB'}} = \dfrac{\overline{A'O}}{\overline{AA'}}$

[car les aires vertes sont égales et les aires bleues sont égales]

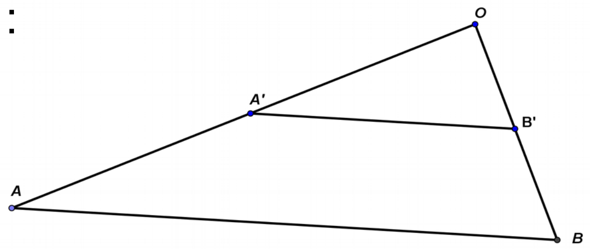
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Thalès (2e forme)

Dans la situation ci-contre :

si $[AB] \parallel [A'B']$

alors $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$



Démonstration :

Deuxième étape (suite)

- pour finir : $\frac{\overline{B'O}}{\overline{BB'}}=\frac{\overline{A'O}}{\overline{AA'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{B'O}}{\overline{BO}-\overline{B'O}}=\frac{\overline{A'O}}{\overline{AO}-\overline{A'O}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{BO}-\overline{B'O}}{\overline{B'O}}=\frac{\overline{AO}-\overline{A'O}}{\overline{A'O}}$$ [on a multiplié et divisé par les num. et dénom.]

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{BO}}{\overline{B'O}}-1=\frac{\overline{AO}}{\overline{A'O}}-1$$ [car différence et simplification de fractions]

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{BO}}{\overline{B'O}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{A'O}}$$ [+1]

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{B'O}}{\overline{BO}}=\frac{\overline{A'O}}{\overline{AO}}$$ [on a multiplié et divisé par les num. et dénom.]

- Reste le rapport $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ ...

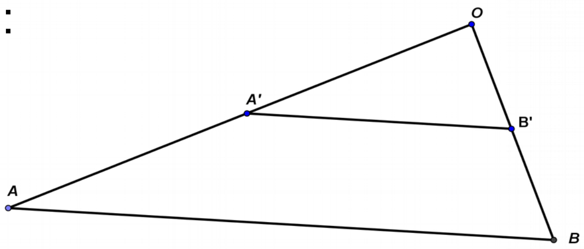
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Thalès (2e forme)

Dans la situation ci-contre :

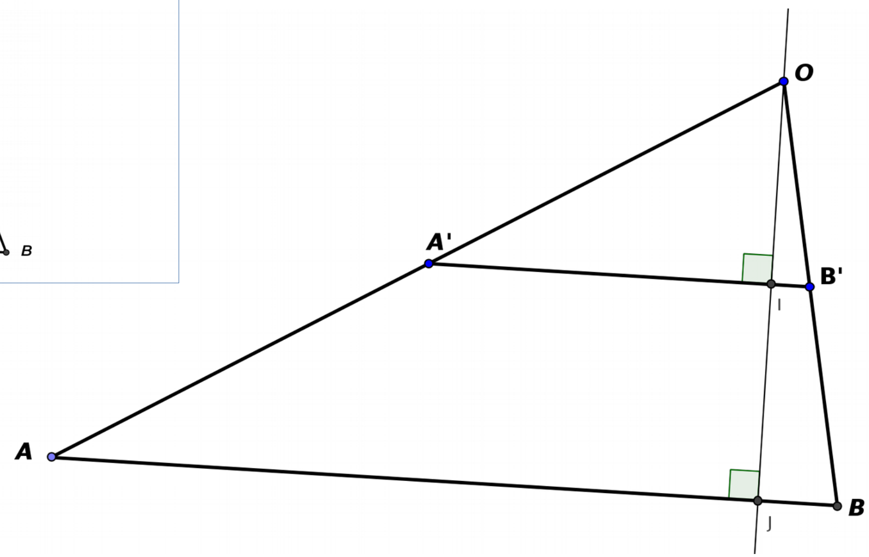
si $[AB] \parallel [A'B']$

alors $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$



Démonstration :

Troisième étape



- on construit la perpendiculaire p à $[AB]$ par O

  et on nomme $I=p\cap[A'B']$ et $J=p\cap[AB]$ [idée!]
- comme on l'a vu précédemment : Aire($\Delta A'JI$) et Aire($\Delta A'AI$), et donc aussi Aire($\Delta A'JO$) et Aire(ΔOAI)

  càd $\frac{\overline{OJ}\cdot\overline{A'I}}{2}=\frac{\overline{OI}\cdot\overline{AJ}}{2}\Leftrightarrow\overline{OJ}\cdot\overline{A'I}=\overline{OI}\cdot\overline{AJ}\Leftrightarrow\frac{\overline{OI}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{A'I}}{\overline{AJ}}$
- identiquement, on a aussi en partant de Aire($\Delta B'IJ$) et Aire($\Delta B'IB$): $\frac{\overline{OI}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{IB'}}{\overline{JB}}$
- on utilise la propriété algébrique $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, d'où : $\frac{\overline{OI}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{A'I}}{\overline{AJ}}=\frac{\overline{IB'}}{\overline{JB}}=\frac{\overline{A'I+IB'}}{\overline{AJ+JB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
- reste à appliquer l'étape 2 aux $\Delta(OA'I)$ et Aire(ΔOAJ), ainsi qu'aux $\Delta(OIB')$ et Aire(ΔOJB) :
- $\frac{\overline{OI}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ et $\frac{\overline{OI}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ avec $\frac{\overline{OI}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ donne $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$

Outils de base de la géométrie euclidienne

Etape 3 :

Définitions	Déf «Δ semblables» / Déf «côtés corr»

Théorèmes	Thm «Thales»
Théorèmes	Thm «contrap-Tha»

Théorème non démontré	Thm «récipr-Tha»
Théorème non démontré	Thm «contrap-récipr-Tha»

...