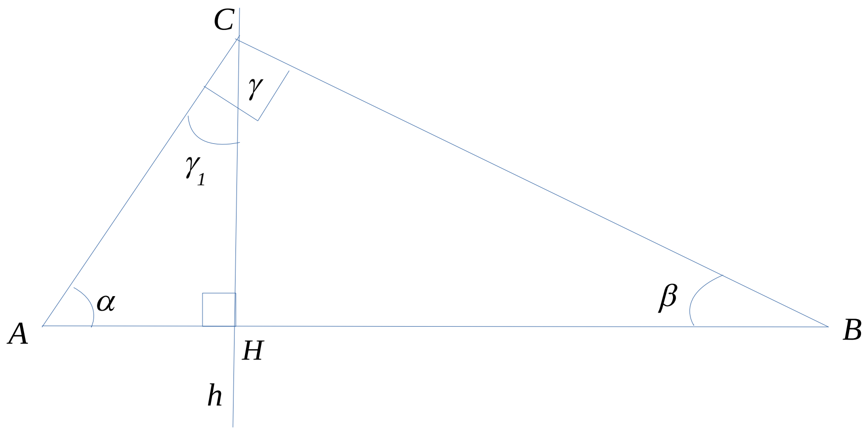
Ma1 Ch8 : Fin de chapitre

Théorème d'Euclide

(a) Théorème: Si $\Delta\, ABC$ est un triangle rectangle en *A*, *h* la hauteur issue de *C* et $H=[AB]\cap h$, alors on a : $\overline{AC}^2=\overline{AH}\cdot\overline{AB}$ et $\overline{BC}^2=\overline{BH}\cdot\overline{AB}$



(b) Démonstration pour $\overline{AC}^2=\overline{AH}\cdot\overline{AB}$ (identique pour $\overline{BC}^2=\overline{BH}\cdot\overline{AB}$) :

idée : nommer $\gamma_1=\widehat{HCA}$ puis comparer $\Delta\, AHC$ et $\Delta\, ABC$

- $\widehat{AHC}=90$, car [déf de la hauteur] et $\gamma=90°$, car [hypothèse]

  α est commun à $\Delta\, AHC$ et à $\Delta\, ABC$

- par ailleurs, on a : $\alpha+\gamma_1+90=180$, car [Thm $\sum \alpha\,\Delta=180$]

  $\Leftrightarrow \gamma_1=90-\alpha$, car [-90 et $-\gamma_1$]

  et aussi $\alpha+\beta+\gamma=180$, car [Thm $\sum \alpha\,\Delta=180$]

  $\Leftrightarrow \gamma=90-\alpha$, car [-90 et $-\gamma$]

  donc $\gamma_1=\gamma$, car [comparaison]

- ainsi $\Delta\, AHC\sim\Delta\, ABC$, car [déf $\Delta\sim$]

- $\overline{AH}$ correspond à $\overline{AC}$, car [opposés au même angle $\gamma_1=\gamma$ dans les deux triangles]

  $\overline{CH}$ correspond à $\overline{BC}$, car [opposés au même angle α dans les deux triangles]

  $\overline{AC}$ correspond à $\overline{AB}$, car [opposés au même angle $\widehat{AHC}=\widehat{BCA}$ dans les deux triangles]

- donc $\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, car [thm Thalès]

  d'où on retient $\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

  et donc $\overline{AH}\cdot\overline{AB}=\overline{AC}^2$, car [$\cdot\overline{AC}$ et $\cdot\overline{AB}$]

  cqfd