Les théorèmes du chapitre 3

Théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si $f(c)= 0$, alors $(x - c)$ divise $f(x)$.

Réciproque du théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si $(x - c)$ divise $f(x)$, alors $f(c) = 0$.

Théorème du diviseur

les 2 précédents théorèmes étant vrais, il s'agit d'une équivalence :

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle. Alors on a :
$(x - c)$ divise $f(x)$ si et seulement si $f(c)= 0$

Contraposée du théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si$(x - c)$ ne divise pas $f(x)$, alors $f(c) \neq 0$

Contraposée de la réciproque du théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si $f(c) \neq 0$, alors $(x - c)$ ne divise pas $f(x)$.

les 2 précédents théorèmes étant vrais, il s'agit aussi d'une équivalence :

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
$(x - c)$ ne divise pas $f(x)$ si et seulement si $f(c) \neq 0$

Théorème [zéros entiers d'une fonction polynomiale <u>à coefficients entiers</u>]

Soit $f(x)=a_n x^n+ a_{n-1} x^{n-1}+ a_{n-2} x^{n-2}+ ...+ a_2 x^2+ a_1 x+ a_0$ avec $a_n \neq 0$ une fonction polynomiale <u>à coefficients entiers</u>.
Si c est un zéro non nul <u>entier</u> de f, alors c est un diviseur de a_0 .

Remarque : on utilise la contraposée de théorème ; si c n'est pas un diviseur de a_0 , alors c ne peut pas être un zéro non nul <u>entier</u> de f

Théorème [zéros rationnels d'une fct polynomiale <u>à coefficients entiers</u>]

Soit $f(x)=a_n x^n+ a_{n-1} x^{n-1}+ a_{n-2} x^{n-2}+ ...+ a_2 x^2+ a_1 x+ a_0$ avec $a_n \neq 0$ une fonction polynomiale <u>à coefficients entiers.</u>

Si $\frac{c}{d}$ est un zéro (non nul) <u>rationnel</u> de f avec $\frac{c}{d}$ irréductible, alors :

- le numérateur c du zéro est un diviseur de a_0 ;
- le dénominateur d du zéro est un diviseur de a_n .

Attention : ce théorème et le précédent permettent de dresser la liste des zéros entiers puis rationnels possibles d'une fonction polynomiale à coefficient entiers, mais ne dit rien sur les éventuels zéros irrationnels de la fonction.