

Equations rationnelles

Quoi ?

Une équation rationnelle (à une inconnue x) est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au moins une fois au dénominateur d'une expression et dont le domaine de définition n'est pas \mathbb{R}

Définition

$$\left. \frac{1}{x^2+1} = 2 \text{ et } \frac{5x}{x-3} + \frac{8}{2x+6} = \frac{90}{x^2-9} \right\} \text{ sont des équations rationnelles}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 - 3 = -3x^2 + x - 1 \\ \frac{1}{x^2+1} = 2 \end{array} \right\} \text{ ne sont pas des équations rationnelles}$$

Exemples

Certains problèmes conduisent à devoir résoudre une telle équation :

«L'inverse de la différence entre un nombre et l'unité est égal au triple du nombre. Quel est ce nombre ?»

L'équation est alors : $\frac{1}{x-1} = 3x$

Pourquoi ?

Résoudre une équation rationnelle

Comment ?

Exemple

Résoudre $\frac{5x}{x-3} + \frac{8}{2x+6} = \frac{90}{x^2-9}$

1 Déterminer le domaine de définition D en identifiant puis en excluant les valeurs de l'inconnue qui posent problème

pb si : $x^2 - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$ 😞

pb si : $2x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x = -6$
 $\Leftrightarrow x = -3$ 😞

pb si : $x^2 - 9 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$
 $\Leftrightarrow (x-3) = 0$ ou $(x+3) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ 😞

Donc

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$


Ce sont toutes les valeurs de x qui sont autorisées dans ce contexte

2 Factoriser le plus possible toutes les fractions rationnelles

$$\frac{5x}{x-3} + \frac{8}{2x+6} = \frac{90}{x^2-9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{x-3} + \frac{8}{2(x+3)} = \frac{90}{(x+3)(x-3)}$$

3 Trouver le PPCM de tous les dénominateurs

pour $(x-3)$, $2(x+3)$ et $(x+3)(x-3)$
 c'est $2(x-3)(x+3)$

Résoudre une équation rationnelle

Comment ?

3) Récrire toutes les fractions rationnelles au même dénominateur

$$\frac{5x}{x-3} + \frac{8}{2(x+3)} = \frac{90}{(x+3)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x \cdot 2 \cdot (x+3)}{2(x+3)(x-3)} + \frac{8 \cdot (x-3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{2 \cdot 90}{2(x+3)(x-3)} \quad \text{jmd}$$

4) Supprimer le ppcm

$$\frac{5x \cdot 2 \cdot (x+3)}{2(x+3)(x-3)} + \frac{8 \cdot (x-3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{2 \cdot 90}{2(x+3)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x \cdot 2 \cdot (x+3) + 8 \cdot (x-3)}{2(x+3)(x-3)} = \frac{2 \cdot 90}{2(x+3)(x-3)} \quad \swarrow 2(x-3)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 5x \cdot 2 \cdot (x+3) + 8 \cdot (x-3) = 2 \cdot 90$$

5) Résoudre la nouvelle équation équivalente obtenue

$$5x \cdot 2 \cdot (x+3) + 8 \cdot (x-3) = 2 \cdot 90$$

$$\Leftrightarrow 5x \cdot 2 \cdot (x+3) + 8 \cdot (x-3) - 180 = 0 \quad \swarrow -180$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 38x - 204 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(5x^2 + 19x - 102) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 19x - 102 = 0 \quad \swarrow :2$$

$$a=5, b=19, c=-102$$

$$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-102) = 2049$$

$$x = \frac{-19 \pm \sqrt{2049}}{2 \cdot 5} \Leftrightarrow x = \frac{-19 \pm 49}{10} \Leftrightarrow x = -6,8 \text{ ou } x = 3$$

6) Ne garder que les solutions qui appartiennent au domaine de définition

$$-6,8 \in D \text{ et } 3 \notin D, \text{ donc } S = \{-6,8\}$$