Puissances

Définition « Puissance entière »

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $a^n \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$: $a^0 \overset{\text{déf}}{=} 1$

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_-$: $a^n \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{1}{a^{-n}}$

Attention : 0^0 n'existe pas

Définition « Puissance rationnelle »

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Soient $a \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Théorème « Propriétés des puissances »

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{Q}$: (à l'exclusion des cas 0^0) :

$a^n \cdot a^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n \cdot m}$ $\quad \dfrac{a^n}{a^m} \overset{\text{thm}}{=} a^{n-m}$ (pour $a \neq 0$)

$a^n \cdot b^n \overset{\text{thm}}{=} (ab)^n$ $\quad \dfrac{a^n}{b^n} \overset{\text{thm}}{=} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (pour $b \neq 0$)

Mais attention : $a^n + b^n \neq (a+b)^n$

Remarque : ces propriétés restent vraies pour n irrationnel !:

Racines

Définition « Racine carrée »

Soient $a \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{a} = b \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} b^2 = a$ et $b \geq 0$

Définition « Racine n-ième »

Si n est pair, la racine n-ième de a, notée $\sqrt[n]{a}$ est, <u>si il existe</u>, le nombre réel <u>positif</u> b tel que la puissance n-ième de b donne a.

Si n est impair, la racine n-ième de a, notée $\sqrt[n]{a}$ est le nombre réel b tel que la puissance n-ième de b donne a..

Théorèmes « Propriétés des racines »

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \overset{\text{thm}}{=} \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\quad \sqrt[n]{a^n} \overset{\text{thm}}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \overset{\text{thm}}{=} a$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \overset{\text{thm}}{=} \sqrt[m \cdot n]{a}$ $\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \overset{\text{thm}}{=} \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, (b \neq 0)$

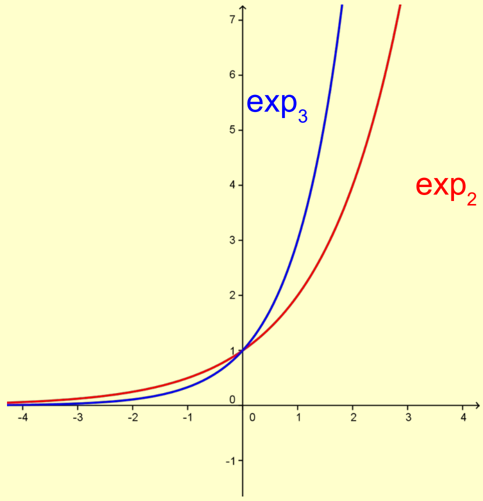
Mais attention : $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

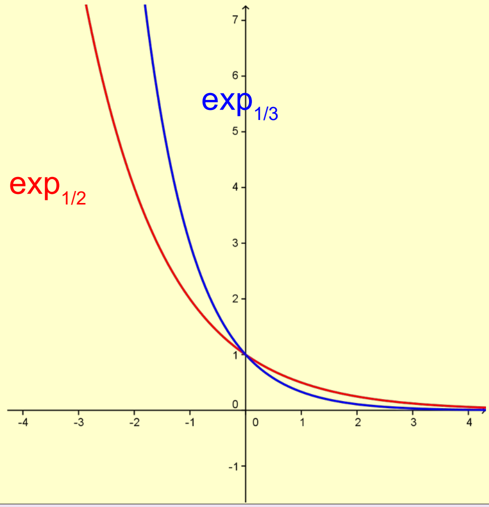
Exponentielles

Définition «Fonction exponentielle de base *a* »

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

$x \to \exp_a(x) = a^x$





Ces fonctions permettent de modéliser des phénomènes à très forte croissance (a >1) ; elles sont **bijectives** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$

Equations exponentielles simples - exemple

$$49^{3x} = 7^{x+1} \Leftrightarrow (7^2)^{3x} = 7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{2\cdot 3x} = 7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{6x} = 7^{x+1} \underset{\text{exp sont bij}}{\overset{\text{car les fct}}{\Leftrightarrow}} 6x = x+1$$

$$\Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \qquad S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$$

Théorème « Loi de croissance continue »

Si q_0 est la valeur d'une quantité q au temps t = 0 (c'est-à-dire que q_0 est la valeur initiale de q), et si q change à chaque instant selon un taux proportionnel à sa valeur actuelle, alors, après un temps t, on aura une quantité : $q(t) = q_0 e^{T\cdot t}$

$e \simeq 2{,}71$ est appelée **constante d'Euler**.

Si $T > 0$, on parle de taux de croissance de q.

Si $T > 0$, on parle de taux de décroissance de q.

Exemple: en 1982, la population des Etats-Unis était d'environ 227 millions d'habitants. La population a continué de croître de manière régulière au taux de 0.7% par an. Calculer le nombre d'habitants en 2021 si ce taux de croissance est resté constant.

On a : q_0 = 227000000, T = 0,007, t = 39, d'où

$$q(30) = 227'000'000 \cdot e^{0.007\cdot 39} \simeq 288'255'356 \text{ habitants}$$