Fonction dérivée, équation de la tangente

7

a. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7-7}{h}=\lim\limits_{h\to 0}0=0$

b. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$

c. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-3x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3=3$

d. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[a(x+h)+b]-[ax+b]}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{ah}{h}=\lim\limits_{h\to 0}a=a$

e. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(2x+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$

f. $$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{[a(x+h)^2+b[x+h]+c]-[ax^2+bx+c]}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2axh+ah^2+bh}{h}$$
$$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2ax+ah+b)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2ax+ah+b)=2ax+b$$

g. $$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

h. $$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

i. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x-(x+h)}{hx(x+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{hx(x+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{x(x+h)}=-\dfrac{1}{x^2}$

j. $$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x^2+1)-[(x+h)^2+1]}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}$$
$$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x^2+1)-(x^2+2xh+h^2+1)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(-2x-h)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}$$
$$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-2x-h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}=\frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+1)}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

k.

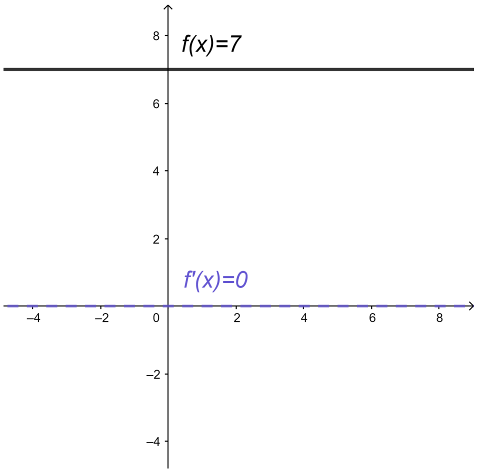
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^2+1]-[x^2+1]}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+1-x^2-1}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})}$$

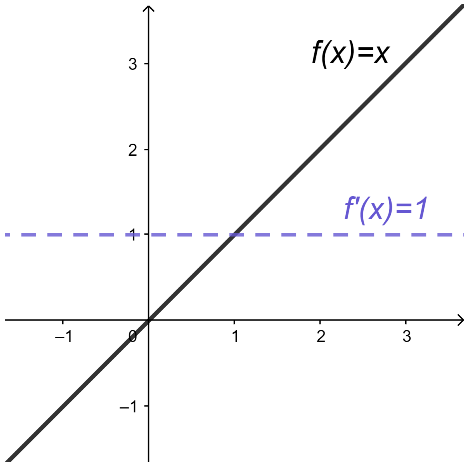
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Représentations graphiques :

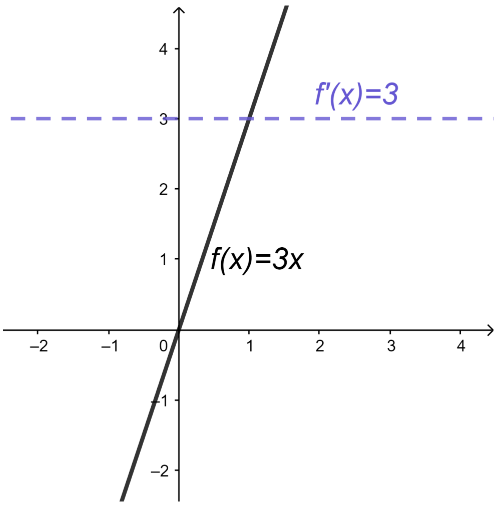
a.



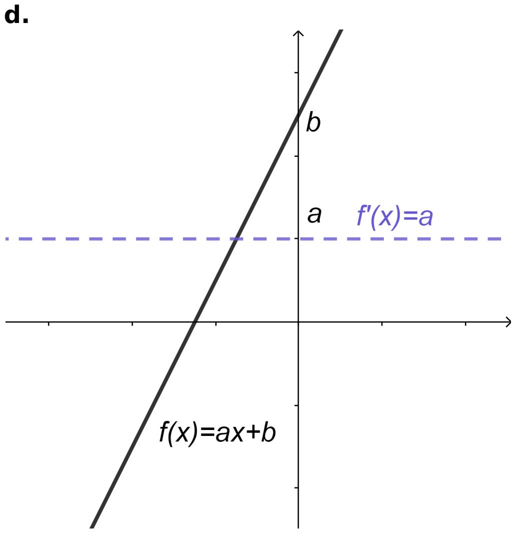
b.



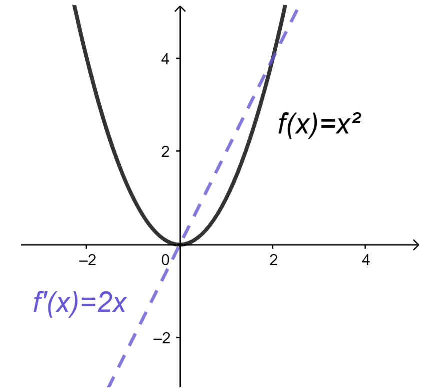
c.



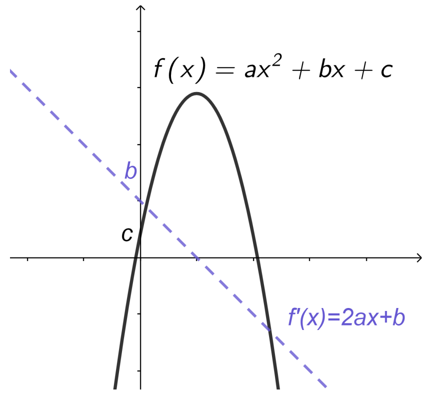
d.



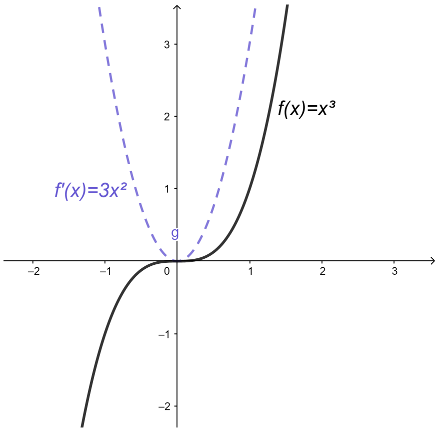
e.


f(x)=x²
f'(x)=2x

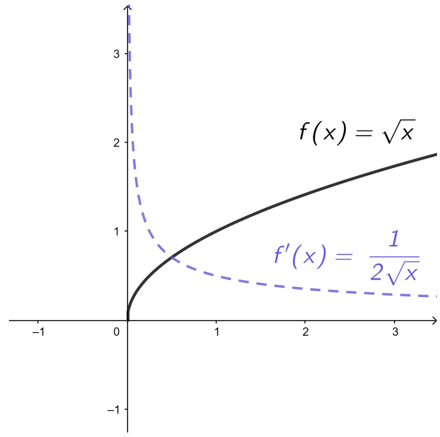
f.


$f(x) = ax^2 + bx + c$
b
c
f'(x)=2ax+b

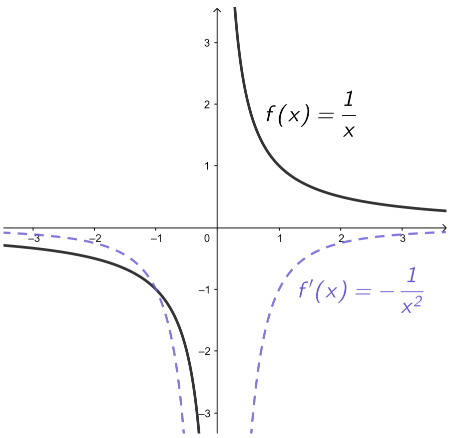
g.


f(x)=x³
f'(x)=3x²

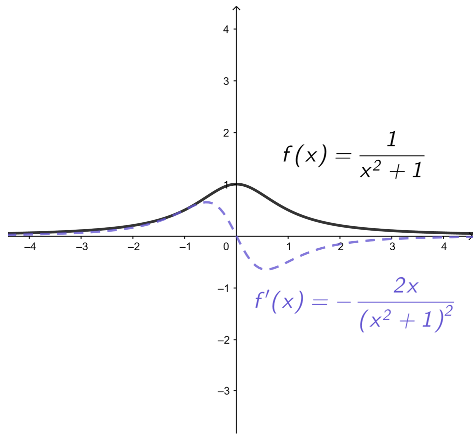
h.


$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

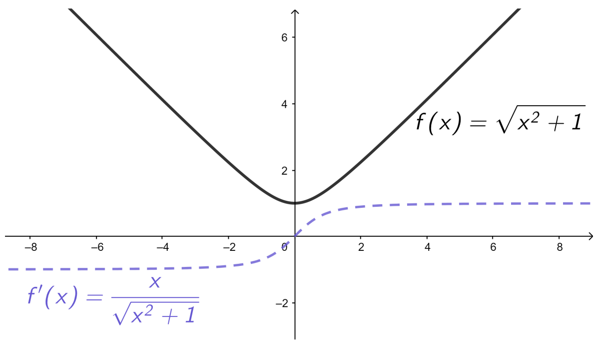
i


$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

j.


$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

k.


$f(x) = \sqrt{x^2+1}$
$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

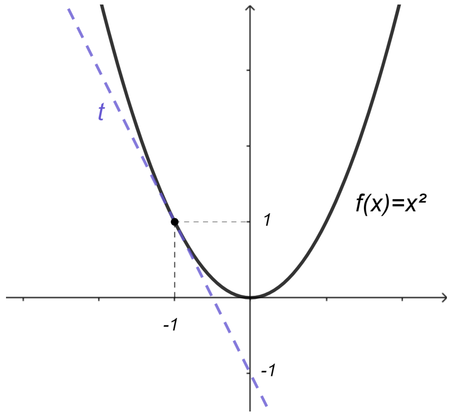
8

Soit t - la droite tangente à la parabole d'équation $y=x^2$ au point (-1;1),

alors l'équation de $t: y=px+q$ où p représente à la pente, q est l'ordonnée à l'origine.

On sait que $p=f'(-1)$, donc :

$$p=f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{(-1+h)+1}=\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-(-1)^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-2+h)=-2$$



Donc $t: y=-2x+q$

Cherchons q : le point $(1;-1)\in t$, donc on a :

$$1=-2\cdot(-1)+q \quad\Leftrightarrow\quad q=-1$$

et l'équation de la droite tangente est

$$t: y=-2x-1$$

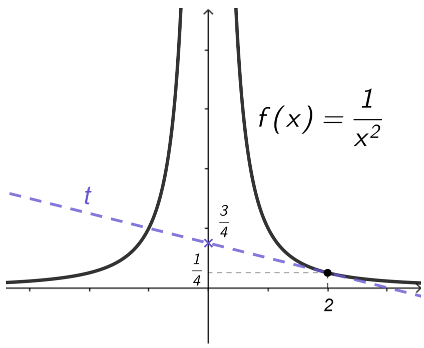
Remarque : cela correspond bien au graphique.

9

Soit t - la droite tangente à la fonction réelle $f: x\to\frac{1}{x^2}$ au point $(2;\frac{1}{4})$

alors l'équation de $t: y=px+q$ où $p=f'(2)$, donc :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{-h\cdot(2x+h)}{h\cdot x^2\cdot(x+h)^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(2x+h)}{x^2\cdot(x+h)^2}=-\frac{2x+0}{x^2\cdot(x+0)^2}=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$$



D'où $p=f'(2)=-\frac{2}{2^3}=-\frac{1}{4}$, donc $t: y=-\frac{1}{4}x+q$

$$(2;\frac{1}{4})\in t \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\cdot 2+q \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+q \quad\Leftrightarrow\quad q=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

D'où

$$t: y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$$

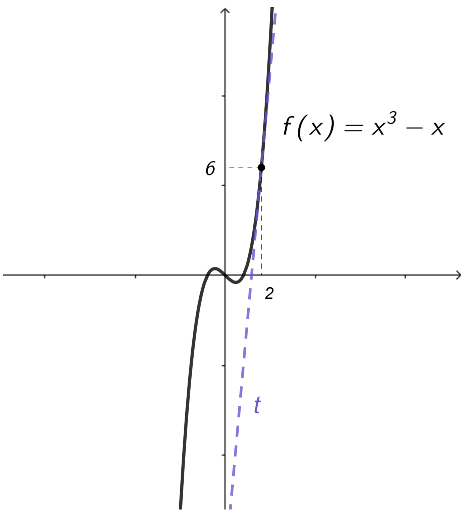
10 Soit *f* définie par $f(x)=x^3-x$.

Soit $f(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$

a.

Si $x=2$, alors

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{(2+h)-2}=\lim_{h\to 0}\frac{[(2+h)^3-(2+h)]-(2^3-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{8+12h+6h^2+h^3-2-h-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{11h+6h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(11+6h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(11+6h+h^2)=11$$



Donc l'équation de $t: y=11x+q$ et il reste à trouver q :

le point $(2;f(2))=(2;6)\in t$, donc on a :

$$6=11\cdot 2+q \quad\Leftrightarrow\quad 6=22+q \quad\Leftrightarrow\quad q=-16$$

et l'équation de la tangente est :

$$t: y=11x-16$$

b.

Soit $f'(x)=2$. Calculons $f'(x)$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^3-(x+h)]-(x^3-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2-1)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-1)=3x^2-1$$

On sait que $f'(x)=2 \;\Leftrightarrow\; 3x^2-1=2 \;\Leftrightarrow\; 3x^2=3 \;\Leftrightarrow\; x^2=1 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 1$

L'équation de $t: y=2x+q$

En $x_1=1$:

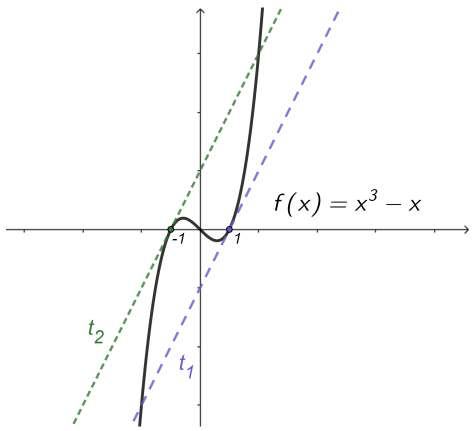
$$(1;f(1))=(1;0)\in t \quad\Leftrightarrow\quad 0=2\cdot 1+q \quad\Leftrightarrow\quad q=-2$$

alors l'équation $t_1: y=2x-2$

En $x_2=-1$:

$$(-1;f(-1))=(-1;0)\in t \quad\Leftrightarrow\quad 0=2\cdot(-1)+q \quad\Leftrightarrow\quad q=2$$

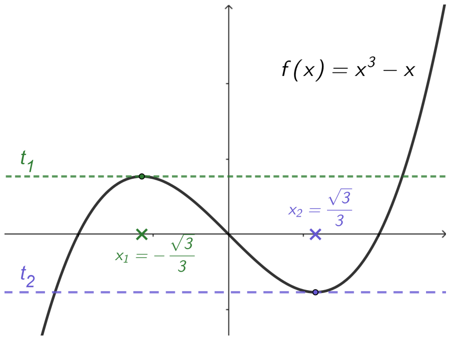
alors l'équation $t_2: y=2x+2$



c.

Les tangentes sont horizontales $\Rightarrow$ $f'(x)=0$, alors

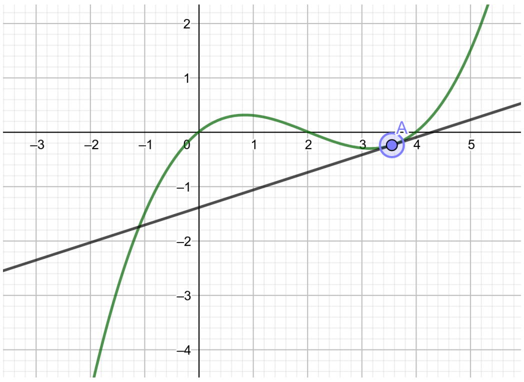
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2=1$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$



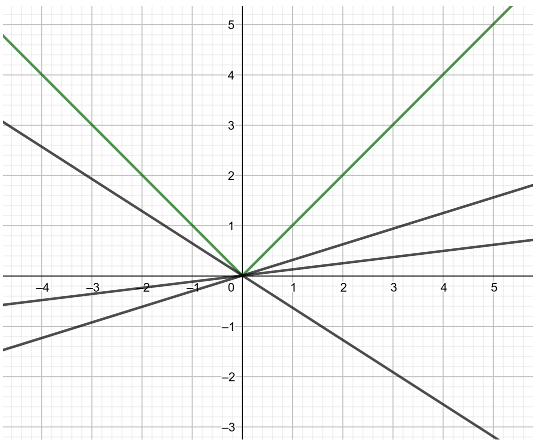
et pour les $x_1 = -frac\sqrt{3}3, x_2 = frac\sqrt{3}3$ les tangentes sont horizontales.

11

a. Faux ; contre-exemple :



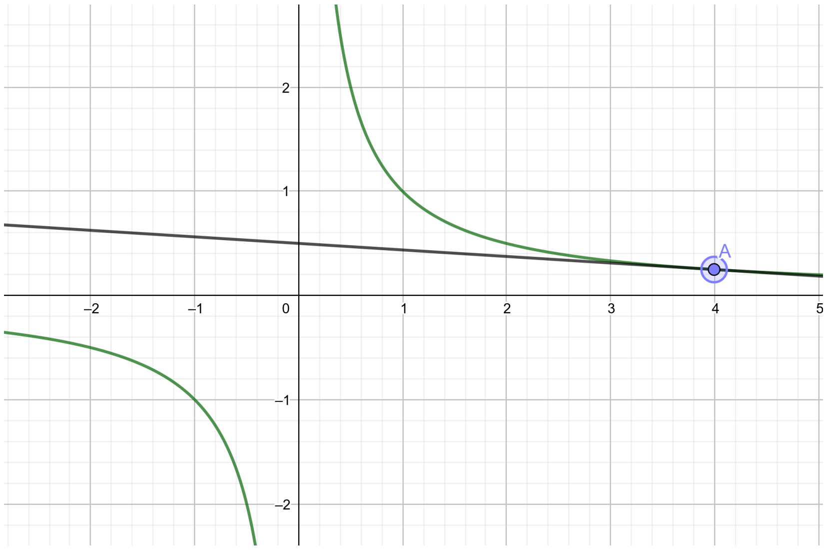
a. Faux ; contre-exemple :



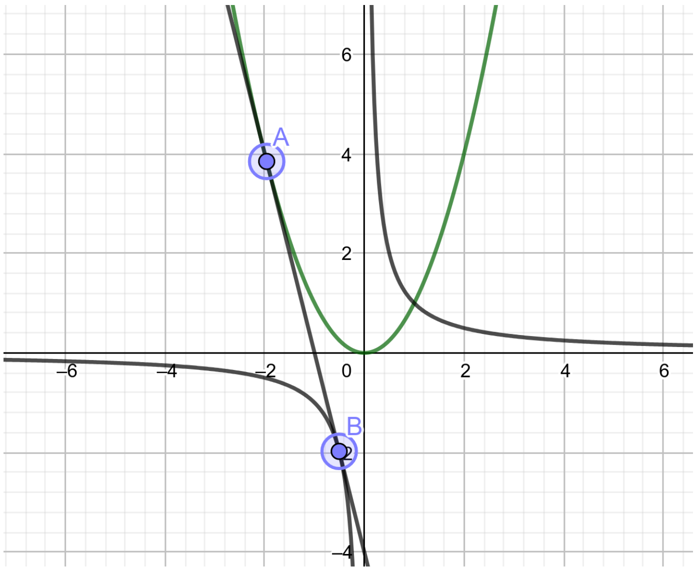
aucune des droites n'est la tangente en 0 (elle n'existe pas!)

12 Cf ex 7i : $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$. Puis $t_f: y=f'(a)(x-a)+f(a)=-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$

En $\left(4;\frac{1}{4}\right)$: $t_f: y=-\frac{1}{16}\cdot x+\frac{1}{2}$



13 En illustrant, on peut conjecturer une unique solution :



On pose a_1 l'abscisse du premier point, et a_2 celle du second, et on a :

$t_f: y=f'(a_1)(x-a_1)+f(a_1)=2a_1(x-a_1)+(a_1)^2$

$t_g: y=f'(a_2)(x-a_2)+f(a_2)=-\frac{1}{(a_2)^2}(x-a_2)+\frac{1}{a_2}$

deux équations de la même droite, donc on a : $2a_1(x-a_1)+(a_1)^2=-\frac{1}{(a_2)^2}(x-a_2)+\frac{1}{a_2}$

$\Leftrightarrow\left(2a_1+\frac{1}{(a_2)^2}\right)x+\left(-(a_1)^2-\frac{2}{a_2}\right)=0$, ce qui est équivalent à : $\begin{cases}2a_1+\frac{1}{(a_2)^2}=0\\-(a_1)^2-\frac{2}{a_2}=0\end{cases}$, un système 2x2 non linéaire.

Dans la 1re équation, on a: $a_1=-\frac{1}{2(a_2)^2}$ et substitue dans la 2e :

$-(-\frac{1}{2(a_2)^2})^2+\frac{2}{a_2}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{4(a_2)^4}+\frac{2}{a_2}=0\Leftrightarrow\frac{-1+8(a_2)^3}{4(a_2)^4}=0\Leftrightarrow8(a_2)^3=1\Leftrightarrow a_2=\frac{1}{2}$

puis dans la 1re : $a_1=-\frac{1}{2(a_2)^2}=\ldots=-2$

Ce résultat algébrique est bien cohérent avec la représentation graphique.

14 Intersection des courbes représentatives de f et g : $x^2=-\frac{1}{3}x^2+1\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

On pose $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c’est symétrique pour $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$) :

$f'(a)=\ldots=2a$, donc la tangente est d’équation $t_f: y=2\frac{\sqrt{3}}{2}x+b=\sqrt{3}x+b$

Puis : $(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4})\in\Gamma_f\Leftrightarrow\frac{3}{4}=\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}+b\Leftrightarrow b=-\frac{3}{4}$, et donc $t_f: y=\sqrt{3}x-\frac{3}{4}$

Idem pour $t_g: y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{5}{4}$

Comme $\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1$, les deux tangentes sont perpendiculaires.

Remarque : on n’avait pas besoin des équations des tangentes !

15

<u>Hypothèse</u> : f - est constante sur I , c'est-à-dire $f(x)=c, \forall x \in I$

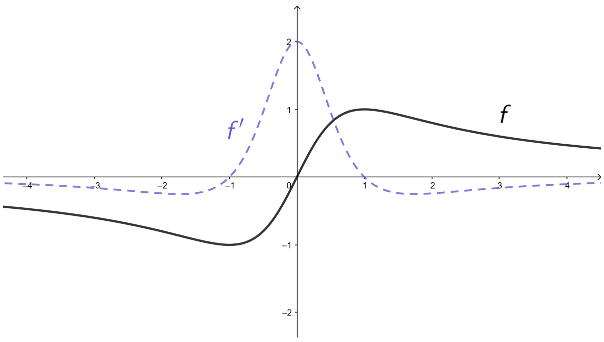
<u>Conclusion</u> : $f'(x)=0 \; \forall x \in I$

<u>Démonstration</u> : $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 0=0$

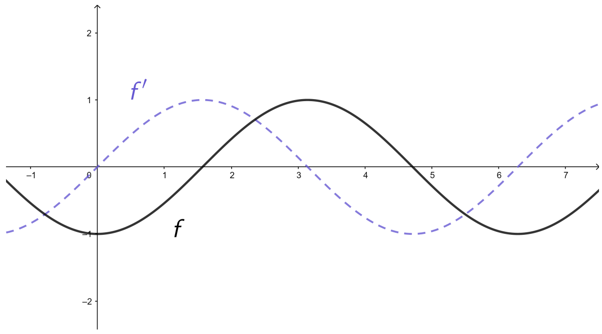
CQFD

16

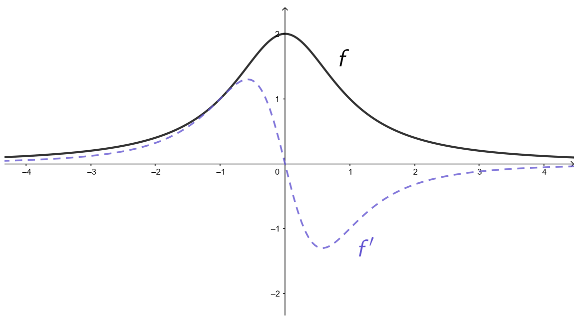
a.



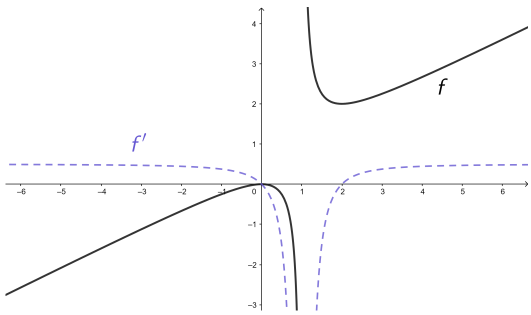
b.



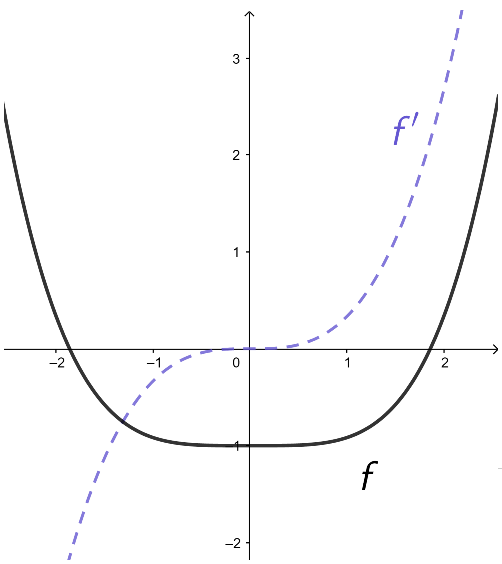
c.



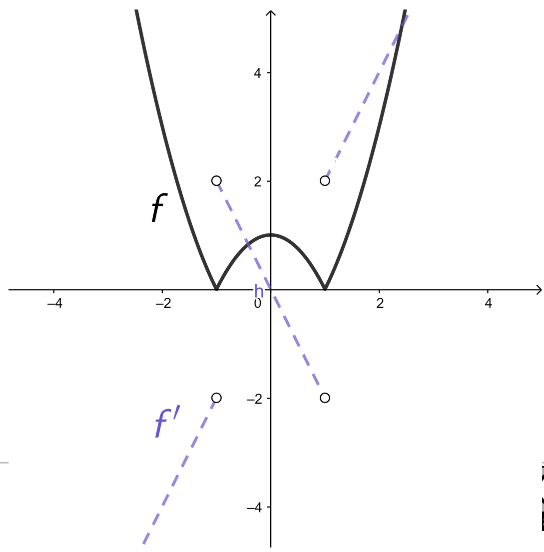
d.



e.

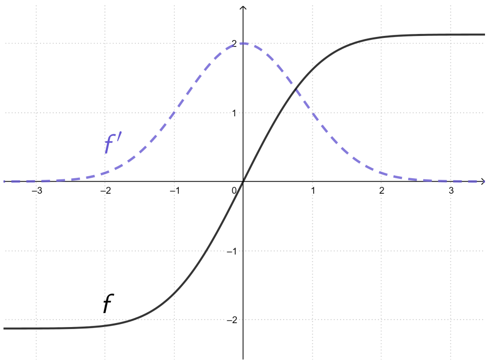


f.

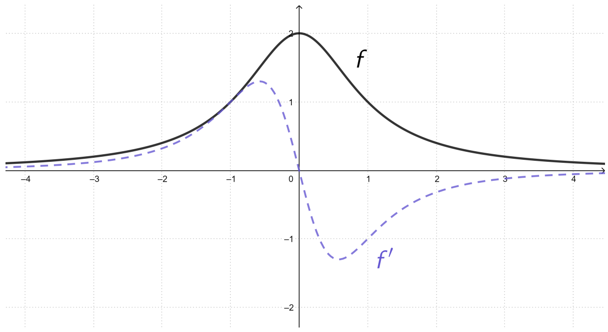


17

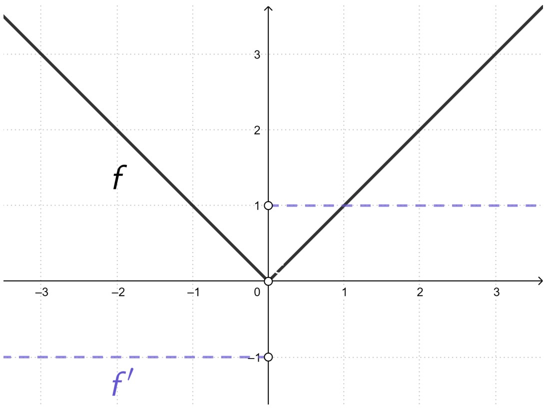
a.



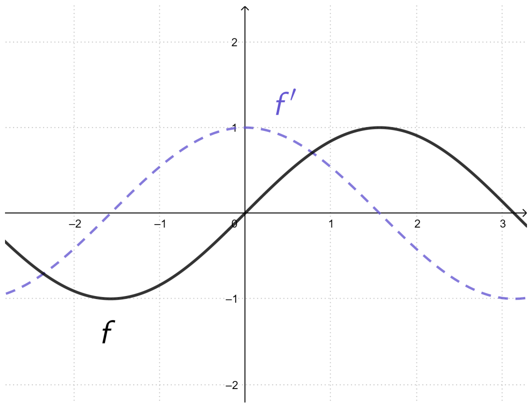
b.



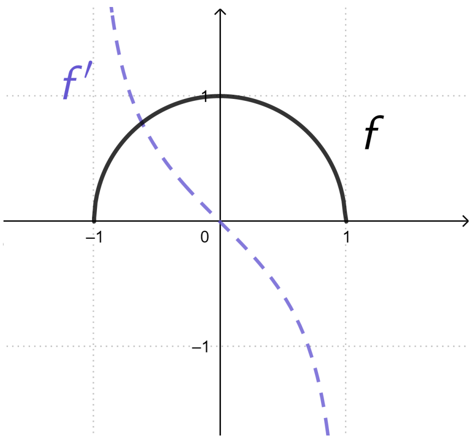
c.



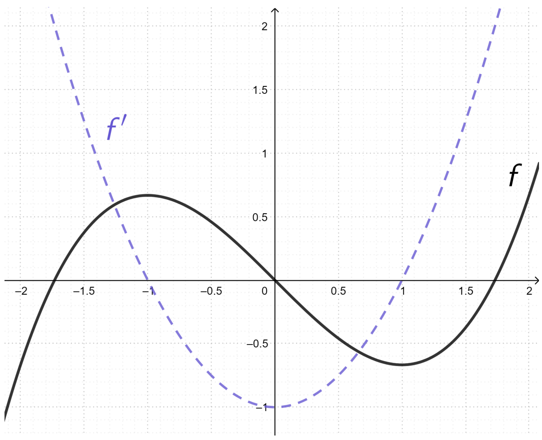
d.



e.

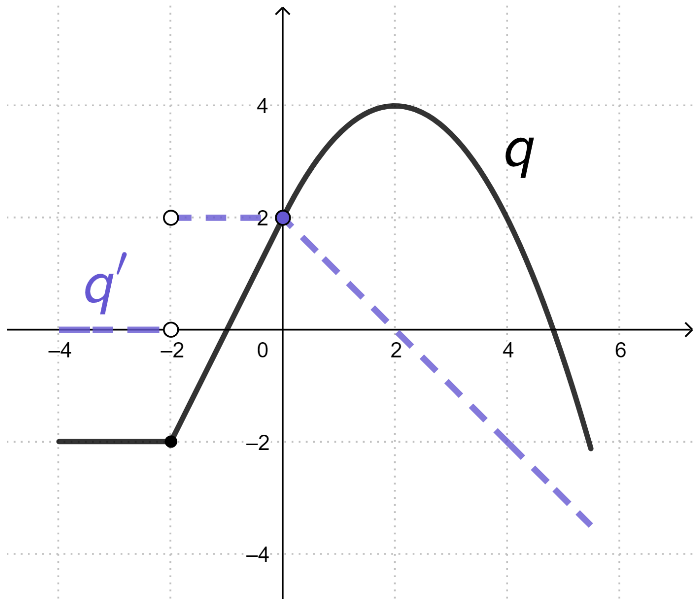


f.



18

a.



b.