Théorème « Limite sin(x) sur x »

On considère le théorème suivant :

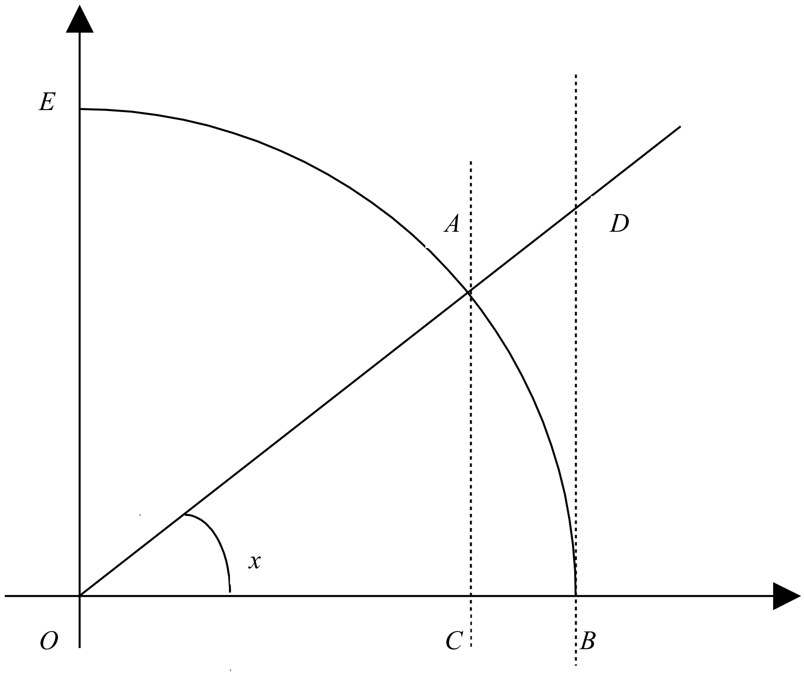
Théorème « Limite sinus x sur x »

Soit la fonction f : R* →R déterminée par $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$. Alors $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

On propose ci-dessous une démonstration de ce théorème, pour chacun des […à compléter…], proposer un contenu adapté.

Démonstration :

On considère le schéma ci-dessous, où *BE* est un arc de cercle trigonométrique :



Soit $x\in]0\,;\frac{\pi}{2}]$

On a :

- longueur du segment [*OB*] = [.......], car [ARG : ....]
  longueur du segment [*AC*] = sin(*x*), car [ARG : ....]
  donc Aire(ΔOAB) = [.............................]

- longueur du segment [*OB*] = [.........................], car [ARG : ....]
  longueur du segment [*BD*] = [..................], car [ARG : ....]
  donc Aire(ΔOBD) = $\frac{1\cdot\tan(x)}{2}$

- longueur de l'arc de cercle *BA* = *x*, car [ARG : ....]

donc aire du secteur OBA = [……………], car [ARG : …...…....]

- en comparant les trois aires, on obtient :

  Aire([………………]) < Aire([…………………]) < Aire([…………………])

  c'est-à-dire : $\frac{1\cdot\sin(x)}{2} < \frac{1\cdot x}{2} < \frac{1\cdot\tan(x)}{2}$

  donc on a : $\sin(x) < x < \tan(x)$, car [ARG : …...............................…......…....]

  $\Leftrightarrow$ $\sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, car [ARG : ….……...................................…....]

  $\Leftrightarrow$ $1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$, car [ARG : ….……...................................…....]

  $\Leftrightarrow$ $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$, car [ARG : ….……...................................…....]

- on fait un passage à la limite quand $x \to 0^+$:

  $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to 0^+} \cos(x) \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to 0^+} 1$

  ce passage à la limite est autorisé, car

  [ARG : …...…]

  les inégalités < deviennent des inégalités $\leq$, car

  [ARG : …...….....................................]

- étudions les deux limites extérieures :

  - la fonction cos est continue sur tout $\mathbb{R}$ et donc continue en 0, car

    [ARG : …...…]

    donc

    $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0)$, car [ARG :...............………………...…]

    $= 1$, car [ARG :..............………………...………...……....................................…]

    donc $\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$, car [ARG : …...…]

  - $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, car [ARG : …...................................……...]

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$, car [ARG : ....]

donc on obtient finalement : $1 \leq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$

c'est-à-dire : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

- Reste à déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

on pose $x = -y$ dans $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et on obtient $\lim\limits_{-y \to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = 1$, car

[ARG :...]

puis : $\lim\limits_{-y \to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = 1 = \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{\sin(-y)}{-y}$, car [ARG : ....]

$= \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{-\sin(y)}{-y}$, car [ARG : ....]

$= \lim\limits_{y \to 0^-} \frac{\sin(y)}{y}$, car [ARG : ....]

donc : $\lim\limits_{y \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, car [ARG : ....]

- Ainsi, finalement : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ [ARG : ....]

cqfd