Démontrer les formules de dérivation

Théorème « Dérivée d'une somme »

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$.

Si f et g sont dérivables en x, alors la fonction $f+g$ est aussi dérivable en x et on a:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(a) Identifier les hypothèses et conclusions de ce théorème.

(b) On propose ci-dessous une démonstration de ce théorème, pour chacun des […à compléter…], proposer un contenu adapté.

Démonstration :

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

car [1 :..]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}$$

car [2 :..]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

car [3 :..]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

car [4 :..]

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

car [5 :..]

$$= f'(x) + g'(x)$$

car [6 :..]

Théorème « Dérivée du produit d'une fonction par un nombre réel »

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in I$.
Si f est dérivable en x, alors la fonction $\alpha \cdot f$ est aussi dérivable en x et on a:

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$$

(a) Identifier les hypothèses et conclusions de ce théorème.

(b) On propose ci-dessous une démonstration de ce théorème, pour chacun des […à compléter…], proposer un contenu adapté.

Démonstration :

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\alpha \cdot f)(x+h) - (\alpha \cdot f)(x)}{h} ,$$

car [1 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\alpha \cdot f(x+h) - \alpha \cdot f(x)}{h} ,$$

car [2 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \alpha \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} ,$$

car [3 :...]

$$= \alpha \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} ,$$

car [4 :...]

$$= \alpha \cdot f'(x) ,$$

car [5:...]

Théorème « Dérivée du produit de deux fonctions »

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$.

Si f et g sont dérivables en x, alors la fonction fg est aussi dérivable en x et on a:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(a) Identifier les hypothèses et conclusions de ce théorème.

(b) On propose ci-dessous une démonstration de ce théorème, pour chacun des […à compléter…], proposer un contenu adapté.

Démonstration :

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h}$$

car [1 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) \cdot g(x+h)) - (f(x) \cdot g(x))}{h}$$

car [2 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

car [3 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x)}{h}$$

car [4 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot (g(x+h) - g(x)) + g(x) \cdot (f(x+h) - f(x))}{h}$$

car [5 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} + \frac{g(x) \cdot (f(x+h) - f(x))}{h} \right)$$

car [6 :...]

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\cdot\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}+g(x)\cdot\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\right)$$

car [7 :...]

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\cdot\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\right)$$

car [8 :...]

$$= \lim_{h\to 0}(f(x+h))\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}(g(x))\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

car [9 :...]

$$= f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

car [10 :...]

$$= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

car [11 :...]

Théorème « Dérivée de l'inverse d'une fonction »

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$.
Si f est dérivable en x et si il existe un voisinage V de x tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in V$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dérivable en x et on a: $(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

(a) Identifier les hypothèses et conclusions de ce théorème.

(b) On propose ci-dessous une démonstration de ce théorème, pour chacun des […à compléter…], proposer un contenu adapté.

Démonstration :

$$(\frac{1}{f})'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{1}{f})(x+h) - (\frac{1}{f})(x)}{h}$$

car [1 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}$$

car [2 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x)}{f(x+h) \cdot f(x)} - \frac{f(x+h)}{f(x+h) \cdot f(x)}}{h}$$

car [3 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h) \cdot f(x)}}{h}$$

car [4 :...]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h \cdot (f(x+h) \cdot f(x))}$$

car [6 :...]

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{f(x+h)-f(x)}{h\cdot(f(x+h)\cdot f(x))}$$

car [7 :...]

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{(f(x+h)\cdot f(x))}$$

car [8 :...]

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{(f(x+h)\cdot f(x))}$$

car [9 :...]

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{(f(x+h)\cdot f(x))}$$

car [10 :...]

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}(f(x+h)\cdot f(x))}$$

car [11 :...]

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}(f(x+h))\cdot\lim\limits_{h\to 0}(f(x))}$$

car [12 :...]

$$= -f'(x)\cdot\frac{1}{f^2(x)}$$

car [13 :...]

$$= -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

car [14 :...]