Théorème sur l'indépendance

Rappel des deux définitions importantes :

- la **probabilité conditionnelle** (probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé) :
  $p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$
- A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A|B)=p(A)$ et $p(B|A)=p(B)$

Une remarque : si $p(B|A)=p(B)$, alors $p(A|B)=p(A)$
ce qui signifie que si B dépend de A, alors A dépend aussi de B

dém : $p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$, car [ARG 1 : ……………………………………………………]

$=\frac{p(B\cap A)}{p(B)}$, car [ARG 2 : ……………………………………………………]

$=\frac{p(B|A)\cdot P(A)}{p(B)}$, car [ARG 3 : ……………………………………………]

$=\frac{p(B)\cdot P(A)}{p(B)}$, car [ARG 4 : …………………………………………….……]

$=P(A)$, car [ARG 5 : ……………………………………………]

Il suffit donc de démontrer que $p(A|B)=p(A)$ ou $p(B|A)=p(B)$ pour que A et B soient indépendants.

La contraposée dit : si $p(A|B)\neq p(A)$, alors $p(B|A)\neq p(B)$: il suffit donc de démontrer que $p(A|B)\neq p(A)$ ou $p(B|A)\neq p(B)$ pour que A et B soient dépendants

Théorème : Soit A et B deux événements aléatoires. On a :

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$

Démonstration :

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $p(A|B)=p(A)$ et $p(B|A)=p(B)$ car [ARG 6 : … ..………………]

$\Leftrightarrow$ $p(A|B)=p(A)$ car [ARG 7 : … ..……………………………..………]

$\Leftrightarrow$ $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A)$, car [ARG 8 : ………………………………]

$\Leftrightarrow$ $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$, car [ARG 9 : ……………………..]