

Théorème sur l'indépendance

Rappel des deux définitions importantes :

- la **probabilité conditionnelle** (probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé) :

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$
- A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A|B) = p(A)$ et $p(B|A) = p(B)$

Une remarque : si $p(B|A) = p(B)$, alors $p(A|B) = p(A)$

ce qui signifie que si B dépend de A , alors A dépend aussi de B

$$\begin{aligned} \text{dém : } p(A|B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \text{ car [ARG 1 : définition de la prob conditionnelle]} \\ &= \frac{p(B \cap A)}{p(B)}, \text{ car [ARG 2 : commutativité de l'intersection]} \\ &= \frac{p(B|A) \cdot P(A)}{p(B)}, \text{ car [ARG 3 : définition de la prob conditionnelle]} \\ &= \frac{p(B) \cdot P(A)}{p(B)}, \text{ car [ARG 4 : hypothèse]} \\ &= P(A), \text{ car [ARG 5 : simplification]} \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que $p(A|B) = p(A)$ ou $p(B|A) = p(B)$ pour que A et B soient indépendants.

La contraposée dit : si $p(A|B) \neq p(A)$, alors $p(B|A) \neq p(B)$: il suffit donc de démontrer que $p(A|B) \neq p(A)$ ou $p(B|A) \neq p(B)$ pour que A et B soient dépendants

Théorème : Soit A et B deux événements aléatoires. On a :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants si et seulement si } p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

dém :

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Leftrightarrow p(A|B) = p(A) \text{ et } p(B|A) = p(B) \text{ car [ARG 6 : définition indép.]} \\ &\Leftrightarrow p(A|B) = p(A) \text{ car [ARG 7 : remarque plus haut]} \\ &\Leftrightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A), \text{ car [ARG 8 : définition prob conditionnelle]} \\ &\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B), \text{ car [ARG 9 : multiplication par } p(B)\text{]} \end{aligned}$$