Théorème « Produit scalaire en composantes » (dans le plan)

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors on a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1 w_1+v_2 w_2$ -

Démonstration

On écrit : $\vec{v}=v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+v_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}=w_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+w_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

car [ARG 1: *définition des 2 vecteurs et opérations sur les vecteurs*]

On a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=\left(v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+v_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+w_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, car [ARG 2: *substitution*]

$$=\left(v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+\left(v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)+\left(v_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+\left(v_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\left(w_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

car [ARG 3: *propriété du produit scalaire (savoir l'énoncer)*]

$$=v_1\cdot w_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+v_1\cdot w_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)+v_2\cdot w_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+v_2\cdot w_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

car [ARG4 : *propriété du produit scalaire (savoir l'énoncer)*]

$$=v_1\cdot w_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+v_1\cdot w_2(0)+v_2\cdot w_1(0)+v_2\cdot w_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

car [ARG 5: *thm « orthogonalité et pr.scalaire »*]

$$=v_1\cdot w_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)+v_2\cdot w_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

car [ARG 6: *multiplication d'un nombre par 0 égal 0 ... OU « calcul »*]

$$=v_1\cdot w_1\left(\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\|\cdot\cos(0)\right)+v_2\cdot w_2\left(\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|\cdot\cos(0)\right),$$

car [ARG 7: *déf du pr.scalaire*]

$$=v_1\cdot w_1(1\cdot 1\cdot\cos(0))+v_2\cdot w_2(1\cdot 1\cdot\cos(0)),$$

car [ARG 8: *calcul de la norme*]

$$=v_1\cdot w_1(1\cdot 1\cdot 1)+v_2\cdot w_2(1\cdot 1\cdot 1),$$

car [ARG 9: *définition du cos*]

$$=v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2$$