Equation d'un plan dans l'espace

Objectif

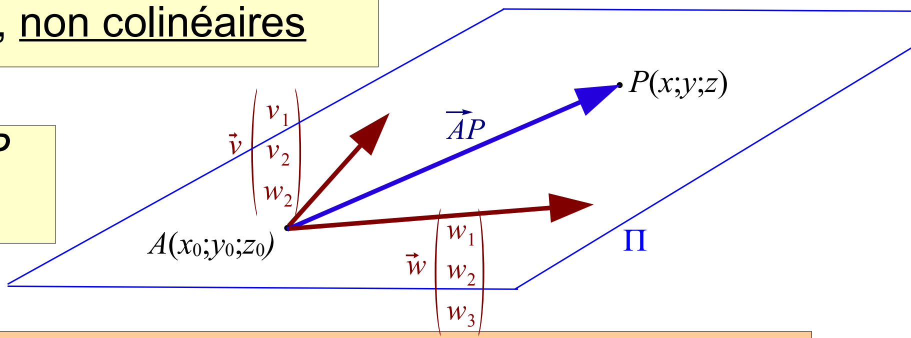
Déterminer une équation cartésienne d'un plan Π de l'espace

Méthode 1 : un point et deux vecteurs directeurs

Donnée

Un point *A* et deux vecteurs directeurs connus $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de Π, non colinéaires

On considère un point *P* inconnu de Π



$P\in\Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$

$\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$, avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ — équation vectorielle de Π

on écrit les vecteurs en composantes

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-x_0=\lambda v_1+\mu w_1 \\ y-y_0=\lambda v_2+\mu w_2 \\ z-z_0=\lambda v_3+\mu w_3 \end{cases}$$

système d'équations paramétriques de Π

on résout le système en éliminant les paramètres λ et μ

$$ax+by+cz+d=0$$

une équation cartésienne de Π

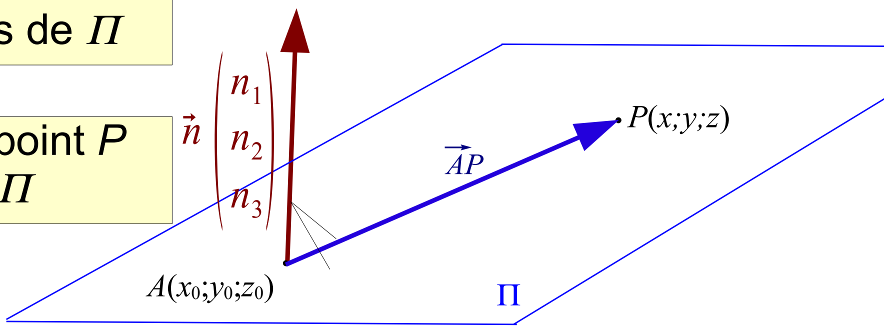
Equation d'un plan dans l'espace

Méthode 2 : un point et un vecteur normal

Donnée

Un point *A* et un vecteur normal $\vec{n}$ connus de Π

On considère un point *P* inconnu de Π



$P \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

on l'exprime par une équation

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

on écrit les vecteurs en composantes

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

définition du produit scalaire

$$(x - x_0)n_1 + (y - y_0)n_2 + (z - z_0)n_3 = 0$$

réduire

$$ax + by + cz + d = 0$$

une équation cartésienne de *d*