Systèmes 3x3 (suite à la 1re...)

Plans dans l'espace et équations de plans

Géométrie	Algèbre
un plan Π de l'espace	une équation du type $ax+by+cz+d = 0$
le point $P(x;y;z)$ appartient au plan	les coordonnées $(x;y;z)$ de P sont solution de l'équation de Π
	Rappel : $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Π

Résoudre un système (linéaire) 3x3, **algébriquement** c'est déterminer tous les triplets $(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient simultanément les trois équations ;
géométriquement, c'est déterminer les éventuels points d'intersections de trois plans

Cas 1	Au moins deux des trois plans sont parallèles ; il n'y a pas de point d'intersection et le système n'a pas de solution
	Cette situation se détecte en considérant trois vecteurs normaux à chacun des plans : on est dans ce cas si ils sont les trois colinéaires et que les trois équations ne sont pas toutes équivalentes.

ex Décrire l'intersection des plans d'équations $x + y + z = 0$, $2x + 2y + 2z = 5$ et $-3x - 3y - 3z = 0$

Approche algébrique

Résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ -3x & - & 3y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} (-2)\cdot① \\ ② \end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \end{array}\right.$$

$+$

$$④ \quad 0x + 0y + 0z = 5$$

$$0=5$$

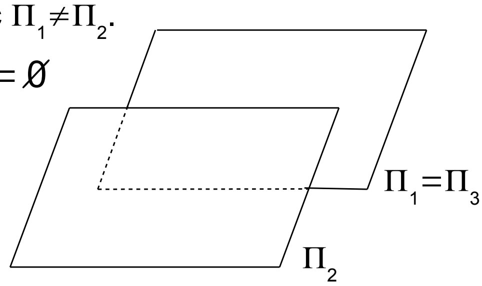
$$S=\emptyset$$

Approche géométrique

$\vec{n}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_3\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

Les équations ① et ③ sont équivalentes, car on obtient ③ en multipliant ① par (-3);
on en déduit que $\Pi_1=\Pi_3$.
Par contre ① et ② ne sont pas équivalentes car donc $\Pi_1\neq\Pi_2$.

donc $S=\emptyset$



Remarque : si on a procédé à l'approche géométrique en premier, on sait qu'il n'y a pas de solution ; on peut ainsi directement écrire $S=\emptyset$ sans aucun calcul algébrique !

Cas 2	Les trois plans s'intersectent en un unique point ; le système a une unique solution
	Cette situation se détecte en considérant trois vecteurs normaux à chacun des plans : on est dans ce cas si ils ne sont pas coplanaires (càd si le produit scalaire du produit vectoriel de deux d'entre-eux avec le 3e n'est pas nul)

ex Décrire l'intersection des plans d'équations $x + y + z = 0$, $x + 2y + 2z = 5$ et $-x + y - z = 0$

Approche algébrique

Résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{array}{c} ①\\ ②\\ ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (-2)\cdot ①\\ ② \end{array}\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

$+$

$$④ \quad -x + 0y + 0z = 5$$

$$x = -5$$

$$\begin{array}{c} ①\\ ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$+$

$$⑤ \quad 2y = 0$$

$$y = 0$$

dans ①: $(-5)+0+z=0$

$$z=5$$

$$S=\{(-5;0;5)\}$$

Approche géométrique

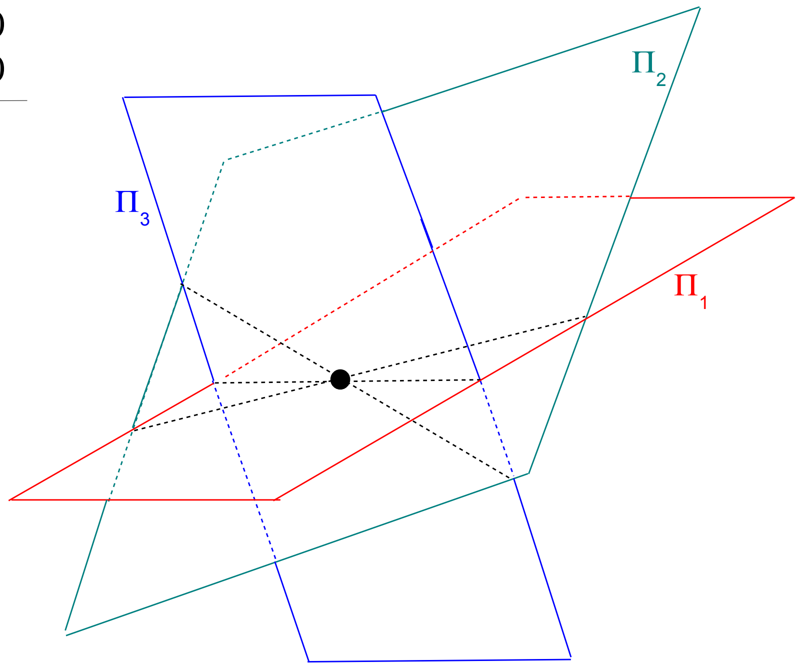
$$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires 2 à 2

$$(\vec{n}_1 x \vec{n}_2)\cdot\vec{n}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=-2\neq 0$$

donc $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas coplanaires

Il y a un unique point d'intersection ...



Remarque : si on a procédé à l'approche géométrique en premier, on sait qu'il y a une unique solution ; on peut ainsi résoudre le système 3x3 de façon standard en sachant que la résolution se déroulera « normalement » jusqu'à obtenir une unique solution.

Cas 3	Les trois plans s'intersectent 2 à 2 en 3 droites parallèles (non concourantes) ; il n'y a pas de solution
	Une partie de cette situation se détecte en considérant trois vecteurs normaux à chacun des plans : on est dans ce cas si ils ne sont pas tous colinéaires mais sont coplanaires (càd si le produit scalaire du produit vectoriel de deux d'entre-eux avec le 3e est nul). Mais il faut le calcul algébrique pour déterminer si ces trois droites sont concourantes ou non et ainsi résoudre le problème ...

ex Décrire l'intersection des plans d'équations $x + y + z = 0$, $x + 2y = 5$ et $y - z = 0$

Approche algébrique

Résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 5 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (-2)\cdot ① \\ ② \end{array}\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$+ \quad ④ \quad -x + 0y - 2z = 5$$

$$④ \quad -x - 2z = 5$$

$$\begin{array}{r} ① \\ (-1)\cdot ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$$+ \quad ⑤ \quad x + 2z = 0$$

$$\begin{array}{c} ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{cases} -x - 2z = 5 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$+ \quad ⑤ \quad 0 = 5$$

$$S = \emptyset$$

Approche géométrique

$$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

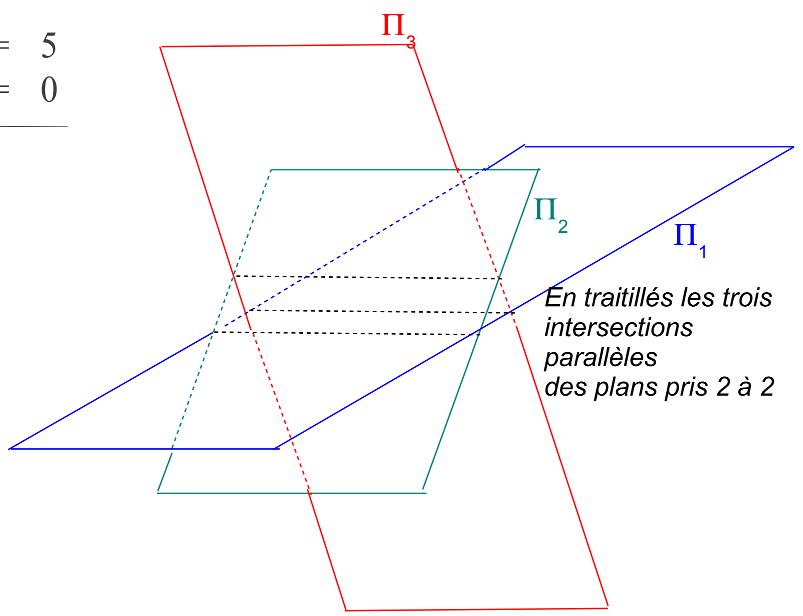
ne sont pas colinéaires 2 à 2

$$(\vec{n}_1 x\, \vec{n}_2)\cdot\vec{n}_3 = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

donc $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont coplanaires

Les plans s'intersectent 2 à 2 en des droites parallèles ; sont-elles concourantes ?

La résolution algébrique peut le déterminer ...



Remarque : si on a procédé à l'approche géométrique en premier, on sait que soit il n'y a pas de solution, soit la solution une droite ; le calcul algébrique va permettre de distinguer les deux situations ...

Cas 4	Les trois plans s'intersectent en une même droite ; tous les points de cette droite forment l'ensemble des solutions du système
	Une partie de cette situation se détecte en considérant trois vecteurs normaux à chacun des plans : on est dans ce cas si ils ne sont pas tous colinéaires mais sont coplanaires (càd si le produit scalaire du produit vectoriel de deux d'entre-eux avec le 3e est nul). Mais il faut le calcul algébrique pour déterminer si ces trois droites sont concourantes ou non et ainsi résoudre le problème ...

ex Décrire l'intersection des plans d'équations $x + y + z = 0$, $x + 2y = 5$ et $y - z = 5$

Approche algébrique

Résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 5 \\ y - z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (-2)\cdot ① \\ ② \end{array}\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$+ \quad ④ \quad -x + 0y - 2z = 5$$

$$④ \quad -x - 2z = 5$$

$$\begin{array}{c} ① \\ (-1)\cdot ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z = -5 \end{cases}$$

$$+ \quad ⑤ \quad x + 2z = -5$$

$$\begin{array}{c} ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{cases} -x - 2z = 5 \\ x + 2z = -5 \end{cases}$$

$$+ \quad ⑤ \quad 0 = 0$$

Il y a donc beaucoup de solutions …
Lesquelles ?
L'approche géométrique nous indique que l'intersection est une droite.
On peut ainsi directement donner la solution en choisissant deux des trois équations de départ :

$$S=\{(x\,;y\,;z)|x+y+z=0 \text{ et } x+2y=5\}$$

Approche géométrique

$$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

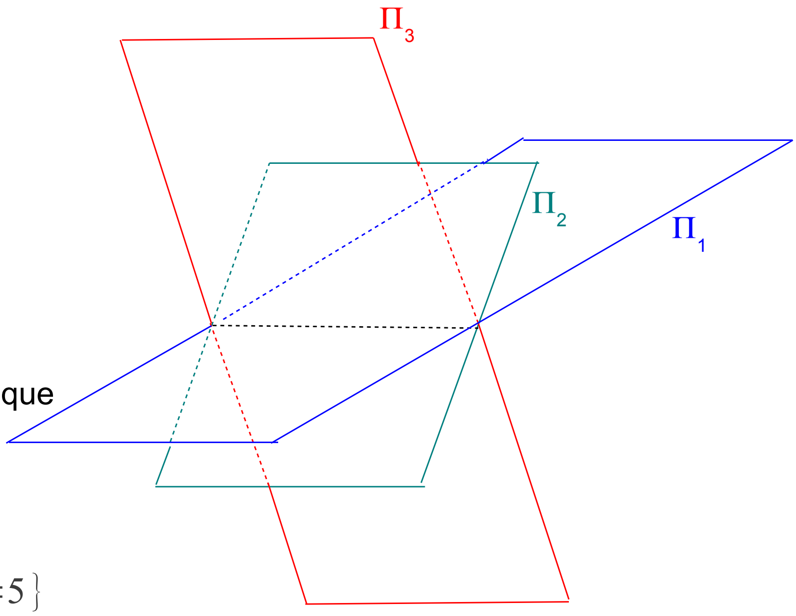
ne sont pas colinéaires 2 à 2

$$(\vec{n}_1 x \vec{n}_2)\cdot\vec{n}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0$$

donc $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ sont coplanaires

Les plans s'intersectent 2 à 2 en des droites parallèles ; sont-elles concourantes ?

La résolution algébrique peut le déterminer ...



Remarque : si on a procédé à l'approche géométrique en premier, on sait que soit il n'y a pas de solution, soit la solution une droite ; le calcul algébrique va permettre de distinguer les deux situations ...

Cas 5	Deux des plans sont confondus et intersectent le 3e en une droite ; tous les points de cette droite forment l'ensemble des solutions du système
	Cette situation se détecte en considérant trois vecteurs normaux à chacun des plans : on est dans ce cas si deux d'entre-eux (et seulement deux) sont colinéaires et que les deux équations concernées sont équivalentes

ex Décrire l'intersection des plans d'équations $x + y + z = 0$, $x + 2y + z = 5$ et $-x - y - z = 0$

Approche algébrique

Résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 5 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (-2)\cdot ① \\ ② \end{array}\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

+

$$④ \quad -x + 0y - z = 5$$

$$④ \quad -x - z = 5$$

$$\begin{array}{c} ② \\ ③ \end{array}\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

+

$$⑤ \quad y = 5$$

$$\begin{array}{c} ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{cases} -x - z = 5 \\ + y = 5 \end{cases}$$

Ce système ne peut pas être résolu avec une unique solution ! On ne peut pas aller plus loin et la solution du système est donnée par ce système de deux équations de plans dont l'intersection est une droite !

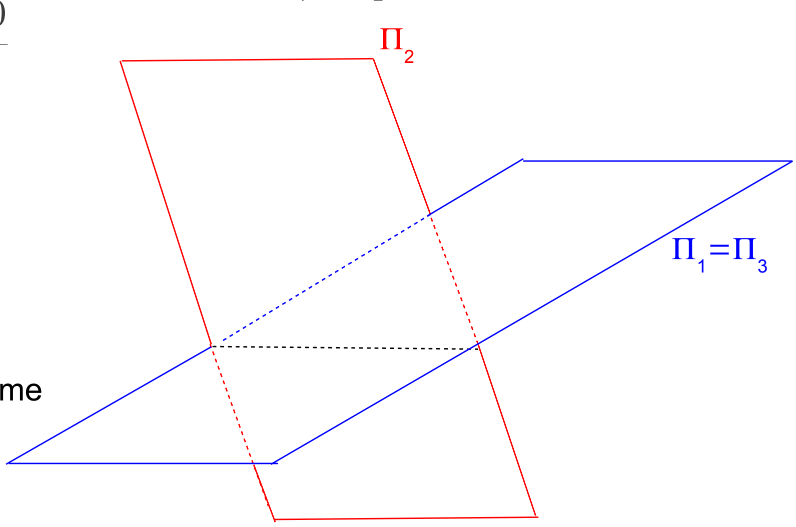
$$S = \{(x\,;y\,;z) | -x - z = 5 \text{ et } y = 5\}$$

Approche géométrique

$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires,

mais pas avec $\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

Les équations ① et ③ sont équivalentes, car on obtient ③ en multipliant ① par (-1);
Les plans Π_1 et Π_3 sont donc confondus.
Comme Π_2 n'est pas parallèle aux deux autres, l'intersections est la droite qui intersecte Π_1 et Π_2



Remarque : si on a procédé à l'approche géométrique, on sait que la solution est une droite, donnée par $\Pi_1 \cap \Pi_2$. On peut ainsi directement donner la solution avec les équations de départ sans aucun calcul algébrique :

$$S = \{(x\,;y\,;z) | x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 5\}$$

Les deux solutions S données ci-dessus représentent bien la même droite ; pour s'en convaincre, vérifier que A(0;5;-5) et B(-5;5;0) – par exemple - sont bien solutions dans les deux cas !

Cas 6	Les trois plans sont confondus ; tous les points de ce plan forment l'ensemble des solutions du système
	Cette situation se détecte en considérant trois vecteurs normaux à chacun des plans : on est dans ce cas si ils sont les trois colinéaires et que les trois équations sont toutes équivalentes.

ex Décrire l'intersection des plans d'équations $x + y + z = 0$, $2x + 2y + 2z = 5$ et $-x - y - z = 0$

Approche algébrique

Résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (-2)\cdot① \\ ② \end{array}\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

\+

$④ \qquad 0=0$

Il y a beaucoup de solutions ...

$$\begin{array}{c} ① \\ ③ \end{array}\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

\+

$⑤ \qquad 0=0$

Il y a beaucoup de solutions ...

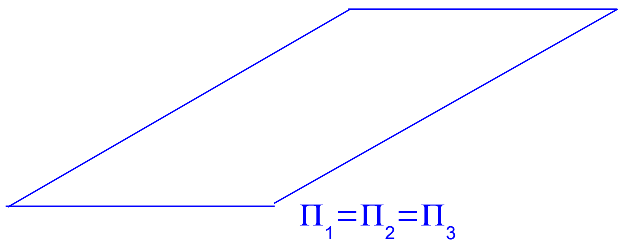
Les trois équations sont équivalentes ; il n'y a qu'un seul plan et la solution du système est constituée de tous les points de ce plan ; on peut choisir n'importe laquelle des trois équations pour exprimer S :

$$S=\{(x\,;y\,;z)\,|\,x+y+z=0\}$$

Approche géométrique

$$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{n}_2\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

Les équations ①, ② et ③ sont équivalentes, car on obtient ③ en multipliant ① par (-1) et ② en multipliant ① par 2;
Les plans Π_1 Π_2 et Π_3 sont donc confondus.



Remarque : si on a procédé à l'approche géométrique en premier, on sait que le plan est solution ; on peut ainsi directement écrire $S=\{(x\,;y\,;z)\,|\,x+y+z=0\}$ *sans aucun calcul algébrique !*