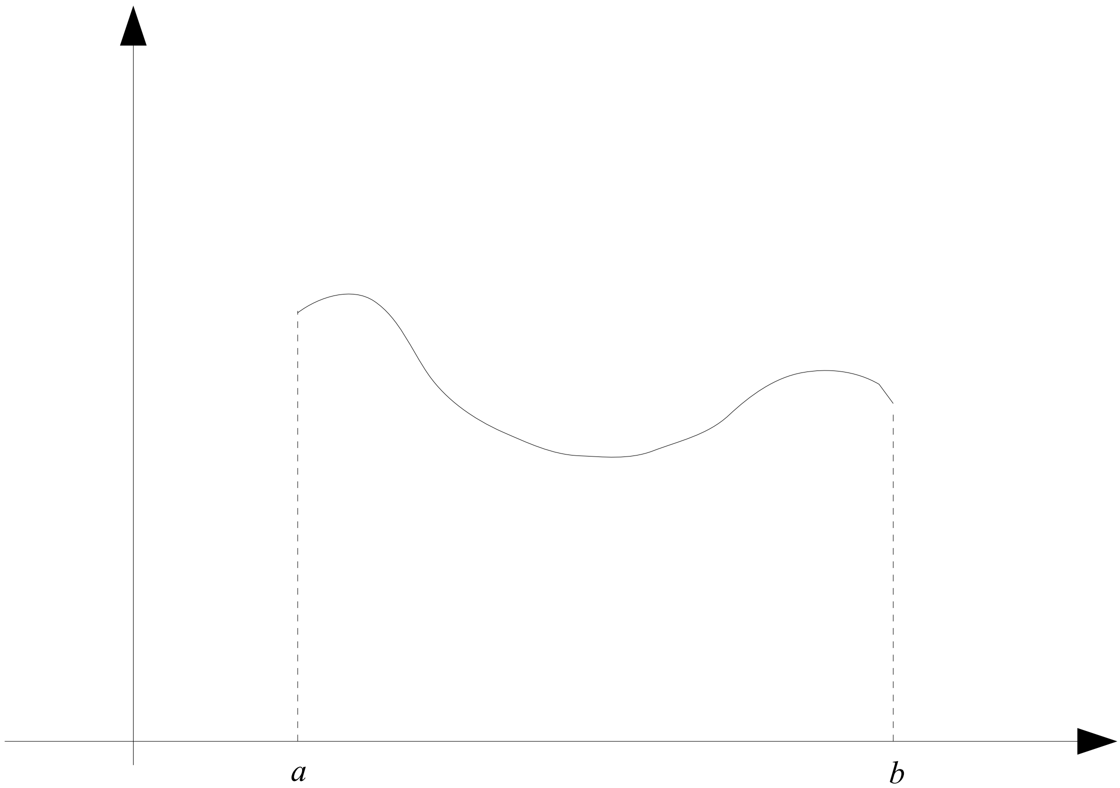
Théorème fondamental I (du calcul différentiel et intégral) : relation entre intégrale et dérivée

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et $x_0\in[a;b]$.
On définit une nouvelle fonction F par $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x\in[a;b]$
Alors, on a: F est dérivable et $F'(x)=f(x), \forall x\in]a;b[$

Démonstration



Cherchons à calculer $\lim\limits_{h\to o}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, car

[ARG 1 : ....]

$$\lim_{h\to o}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to o}\frac{\int_{x_0}^{x+h} f(t)dt-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{h}$$, car

[ARG 2 : ....]

$$= \lim_{h \to o} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \text{, car}$$

[ARG 3 : ....]

Appliquons le théorème de la moyenne à *f* sur $[x\,;x+h]$; c'est possible car

[ARG 4 : ....]

alors il existe un $c \in [x\,;x+h]$ tel que :

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c)(x+h-x) \text{, car}$$

[ARG 5 : ....]

$$= f(c)h$$

On a donc :

$$\lim_{h \to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{f(c) \cdot h}{h}$$
$$= \lim_{h \to o} f(c) \text{, car}$$

[ARG 6 : ....]

Or $\lim_{h \to o} f(c) = f(x)$, car

[ARG 7 : ....]