Ln/exp: les théorèmes à connaître

Théorème : Si $x>0$ et $y>0$, alors $F(xy)=F(x)+F(y)$.

Démonstration

Soit α un nombre réel strictement positif.

On a : $[F(\alpha x)]'=F'(\alpha x)\cdot(................)'$, car [ARG 1]

$=\frac{1}{..............}\cdot(\alpha x)'$, car [ARG 2]

$=\frac{1}{\alpha x}\cdot.............$, car [ARG 3]

$=..............$, car [ARG 4]

$=F'(x)$, car [ARG 5]

Donc $(F(\alpha x))'-[......]=0$, car [ARG 6]

$(F(\alpha x)-F(x))[....]=0$, car [ARG 7]

ce qui implique que $................-F(x)=c$ où c est une constante réelle, car [ARG 8]

Pour déterminer la valeur de la constante, on peut poser x = …………., car [ARG 9]

$F(..................1)-F(1)=c$, d'où $c=F(\alpha)$, car [ARG 10]

On obtient donc finalement la propriété : $F(\alpha x)=F(x)+F(\alpha)$, car [ARG 11]

Comme ceci est vrai pour tout x et tout α strictement positifs, on peut aussi écrire $F(xy)=F(x)+F(y)$.

Théorème : Si $x>0$ et $\alpha\in\mathbb{Q}$, alors $F(x^\alpha)=\alpha\cdot F(x)$

Démonstration

Soit α un nombre réel strictement positif.

On a : $[\alpha F(x)]'=\alpha.................$, car [ARG 1]

mais aussi: $[F(x^\alpha)]'=\frac{1}{..................}(x^\alpha)'$, car [ARG 2]

$=\frac{1}{x^\alpha}(\alpha.......................)$, car [ARG 3]

$=..................\frac{1}{x^\alpha}x^{\alpha-1}$, car [ARG 4]

$=..................\frac{1}{x}$, car [ARG 5]

$=\alpha......................$, car [ARG 6]

d'où: $(F(x^\alpha))'-[.......]=0$, car [ARG 7]

$(F(x^\alpha))'-(\alpha F(x))[....]=0$, car [ARG 8]

$(F(x^\alpha)-\alpha F(x))'=[....]$, car [ARG 9]

ce qui implique que $(F(x^\alpha)-..........................)'=C$ où C est une constante réelle, car [ARG 10]

Pour déterminer la valeur de la constante, on peut poser x = 1, car [ARG 11]

$F(1)-\alpha F(1)=....................$, d'où $C=0$, car [ARG 12]

On obtient donc finalement la propriété : $F(x^\alpha)=\alpha\cdot F(x)$, car [ARG 13]

Théorème : Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $ln^{-1}(x) = e^x$

La réciproque du logarithme naturel, ln^{-1}, est une fonction telle que
ln(……………..) = x pour tout $x \in \mathbb{R}$, car [ARG 1]
$\ln^{-1}$(……………….) = x pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, car [ARG 2]
Donc pour tout x strictement positif et tout nombre $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a:

x^α = $\ln^{-1}$(ln(…………………….....·))
= $\ln^{-1}$(… … … … … … … …..ln(x)), car [ARG 3]

Posons x = … … … ..... : e^α = $\ln^{-1}$(α·....................) = ln-1(………..), car [ARG 4]
Nous avons donc montré que la réciproque du logarithme naturel est une fonction définie par $\ln^{-1}(x)$ =… … … … … … … …..pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
En fait, on peut démontrer que $\ln^{-1}$(…………………..) = e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème : Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

Poser $e^x = X$ et … … … .....^{y} = Y, càd ln(X) = x et ln(Y) =………………. .

On a: $e^{x+y} = e^{\ln(X)+\ldots\ldots}$, car [ARG 1]

$= e^{\ldots\ldots(XY)}$, car [ARG 2]

$= \ldots\ldots\ldots Y$, car [ARG 3]

$= e^x \ldots\ldots\ldots$ car [ARG 4]

Théorème : Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $e^{xy} = \left(e^x\right)^y$

Poser $e^x = X$, càd ln(X) = … … … … .....

On a: $e^{\ldots\ldots x} = e^{\alpha \ln(\ldots\ldots)}$ car [ARG 1]

$= e^{\ldots\ldots(X^\alpha)}$ car [ARG 2]

$= X^{\ldots\ldots}$ car [ARG 3]

$= (e^{\ldots\ldots})^\alpha$ car [ARG 4]

Théorème : Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $\left(e^x\right)' = e^x$

L'exponentielle est la réciproque d'une fonction dérivable, donc elle-même dérivable, car [ARG 1]

Sa dérivée s'obtient en dérivant les deux termes de la relation ln(e^x) = … … … … .....:

on obtient $\dfrac{1}{\ldots\ldots\ldots} \cdot (e^x)' = 1$, car [ARG 2]

d'où $(e^x)' = (\ldots\ldots\ldots\ldots)$, car [ARG 3]