Question 1 (8 points)

On considère les matrices 2x2 suivantes : $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice $B \cdot A$.

b) Calculer la matrice $B \cdot I^{2014} \cdot A$, où I est la matrice identité.

c) Déterminer, si elle existe, la matrice X qui satisfait l'équation matricielle $A \cdot X = B$.

Question 2 (22 points)

On considère les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes :

- F est la rotation centrée à l'origine, d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- G est donnée par $G\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/2\\ 0\end{pmatrix}$.
- La matrice associée à l'application H est $M_H=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Interpréter géométriquement l'action de l'application G.

b) Interpréter géométriquement l'action de l'application H.

c) Calculer si elles existent les images du vecteur $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ par F et par H.

d) Calculer si elles existent les préimages du vecteur $\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$ par G et par H.

e) Donner la matrice associée à l'application linéaire $(G \circ H)$.

f) Pour chacune des applications F, G et H :

- donner la matrice de l'application réciproque si possible,
- sinon, justifier clairement pour quelle(s) raison(s) une telle matrice n'existe pas.

Question 3 (14 points)

a) Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f.

a1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-5}$

a2) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^3-5)^2}$

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale suivante.

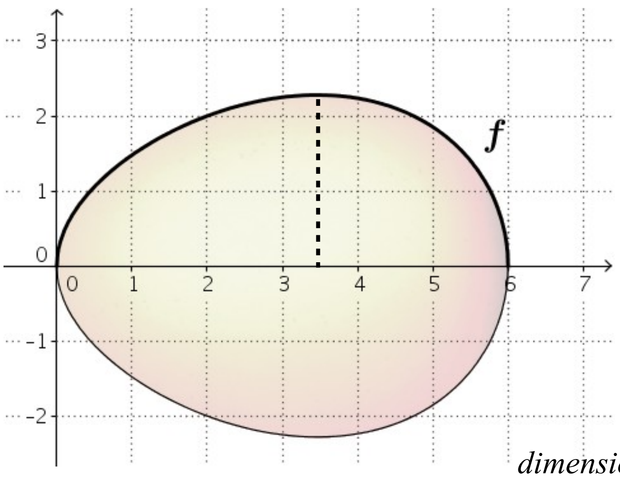
$$\int_1^2 x e^{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

c) Déterminer la primitive de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}+\cos(3x)$ qui passe par le point $\left(\dfrac{\pi}{6};1\right)$.

Question 4 (7 points)

Gallinette a l'immense fierté de vous faire part de la ponte de son œuf de révolution, qu'elle a engendré par une patiente rotation de la représentation graphique de la fonction f autour de l'axe Ox, pour x compris entre 0 et 6 :

$f(x)=\dfrac{1}{4}\sqrt{x(36-x^2)}$



dimensions en cm

a) Vérifier qu'elle a accompli l'exploit de pondre un œuf de plus de 60 cm^3 !

b) BONUS (+3 points)
Déterminer avec une précision au centième de centimètre le rayon maximal de l'œuf (en pointillé sur le dessin).

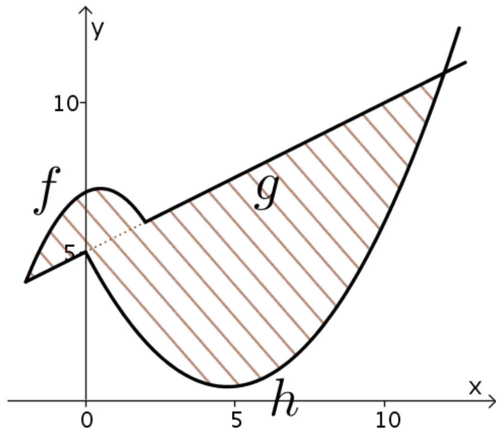
Question 5 (12 points)

Le propriétaire de la ferme où vit Gallinette a décidé d'investir massivement dans la vente d'œufs. Pour la publicité, son projet immédiat est de placer à l'entrée de la ferme une grande enseigne en forme de poule. En voici le plan : sa surface hachurée est délimitée par les représentations graphiques des trois fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=7+\frac{x(1-x)}{2}$$

$$g(x)=\frac{x}{2}+5$$

$$h(x)=\frac{x^2}{5}-1,9x+5$$



dimensions en dm

a) Vérifier que les points d'intersection des représentations graphiques de f et g ont pour abscisse $x=-2$ et $x=2$.

b) Vérifier que les points d'intersection des représentations graphiques de g et h ont pour abscisse $x=0$ et $x=12$.

c) Afin que le propriétaire sache combien d'ampoules clignotantes il doit acheter, calculer l'aire de cette enseigne (aire hachurée) en dm^2.

Question 6 (11 points)

Une usine fabrique des stylos noirs (27 % de la production), rouges (23 % de la production), bleus (36 % de la production) et verts (14 % de la production). La probabilité qu'un stylo soit défectueux est de 0.01 s'il est noir, de 0.02 s'il est rouge, de 0.03 s'il est bleu et de 0.04 s'il est vert.

A la sortie de l'usine, tous les stylos produits sont mélangés et placés dans une grande caisse. Pour un test de qualité, on tire au hasard un stylo de cette caisse.

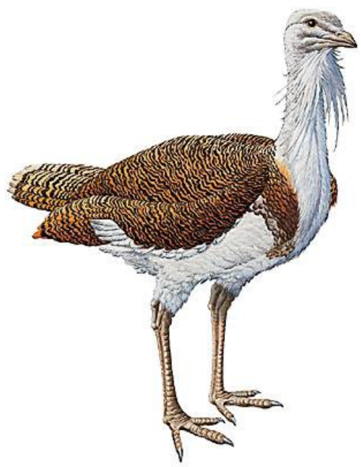
a) Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un stylo rouge en bon état.

b) Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un stylo défectueux.

c) Il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il soit vert ?

Question 7 (14 points)

La Station Ornithologique Saussurienne (SOS) lance une alerte : la population d'Outarde des Zavanes, le sympathique oiseau symbole du Royaume de Saussurie, est gravement menacée. Plus précisément, la SOS a pu constater que, parmi 100 Outardes des Zavanes quittant chaque automne le Royaume pour leur longue migration, seules 15 sont de retour au début du printemps suivant. Or, les oiseaux de cette espèce sont connus pour revenir fidèlement, année après année, nicher sur le site où ils sont nés. On peut en déduire que la mortalité durant la saison hivernale s'élève maintenant à 85 %, très probablement en raison de la dégradation des habitats naturels de l'espèce sur ses lieux d'hivernage.



a) Sachant que 6 couples d'Outardes des Zavanes ont niché ce printemps dans le Parc du Collège Royal (le célèbre Parc Zavana), que chacun des ces couples a élevé un jeune, et en considérant que toutes ces outardes (adultes et jeunes) vont pouvoir entamer leur migration cet automne,

a1) calculer la probabilité que 10 exactement de ces oiseaux reviennent au printemps prochain dans le Parc Zavana ;

a2) calculer la probabilité qu'au moins deux de ces oiseaux reviennent au printemps prochain dans le Parc Zavana.

b) Combien faudrait-il que le Parc Zavana contienne d'Outardes des Zavanes à la fin de cet été, au minimum, pour être sûr à 99 % qu'au moins une sera de retour au printemps prochain ?

Question 8 (12 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Justifier très clairement chaque réponse en vous appuyant sur les définitions, propriétés et théorèmes vus en classe ou sur un contre-exemple précis.

a) Soit A une matrice 2x2 de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Si $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors la matrice $(I - A)$ est inversible, où I est la matrice identité.

b) On considère deux applications linéaires F et G de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Si H est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, alors H est linéaire.

c) La probabilité d'obtenir 2 succès en répétant 4 fois une expérience de Bernoulli (c'est à dire une expérience à deux issues) est égale à la probabilité d'obtenir 5 succès en répétant 10 fois cette même expérience.