Objectifs

•modélisation en mathématiques
•hypothèses implicites ou non
•montrer qu'en mathématique, il y a souvent de nombreux degrés de liberté face à un problème dont la solution n'est pas connue, qu'il y a donc une dimension de modélisation intrinsèque à la recherche mathématique qui n'apparaît pas beaucoup dans les enseignements où les notions sont organisées, classées et où on « sait » à priori comment aborder un problème donné (y compris jusqu'à la fin des études universitaires!)
•finalement, qu'est-ce qu'une démonstration?
•rappels d'astronomie

Déroulement

Fournir aux élèves des énoncés, les faire travailler en groupe puis présenter leurs réflexion. Institutionnaliser en ouvrant les mathématiques à cette dimension non cloisonnée de la démarche scientifique et du raisonnement mathématique

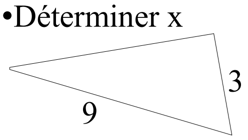
Contenus soumis aux élèves

Interne aux maths

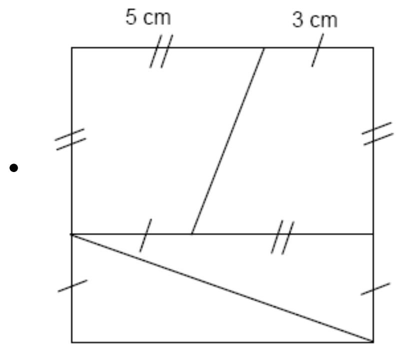
•Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

2n est toujours pair, $\frac{x}{x}=1$, $(x+1)^2=x^2+1$, $\sqrt{x^2}=x$

•Déterminer x



•On considère le carré ci-contre :



Prendre un des deux carrés et le découper afin d'obtenir un puzzle de 4 pièces, reconstituer ce puzzle pour obtenir un rectangle, coller sur la copie le rectangle obtenu et l'autre carréc calculer l'aire du carré, puis celle du rectangle avec les longueurs données dans l'énoncé. Qu'en conclure?

Modélisation « extra-math »

Autour de 225 avant JC, Eratosthène de Cyrène disposait des données suivantes :

D1 : Syène (actuellement Assouan) et Alexandrie, où il vivait, sont situées sur le même méridien (ce qui est exact à environ 2° près) à 5000 stades de distance (un stade = 300 coudées royales d'Egypte = 157,5 mètres) ;

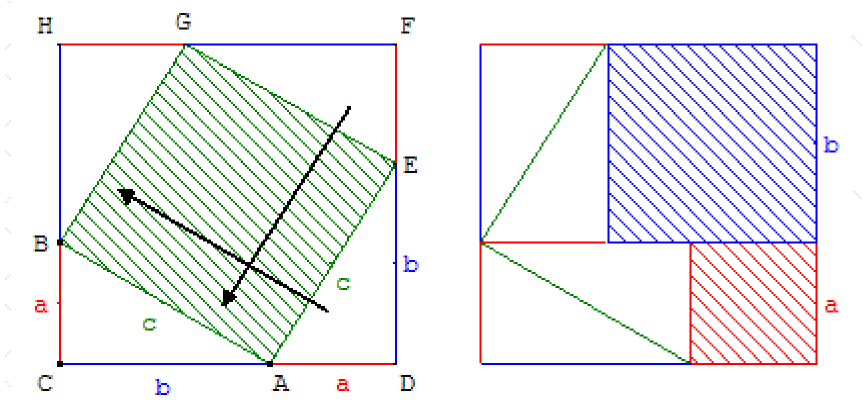
D2 : au jour du solstice d'été, à midi, le soleil se trouve exactement au zénith à Syène ;

D3 : au même moment, les rayons du soleil font à Alexandrie un angle de 1/50 cercle avec la verticale du lieu.

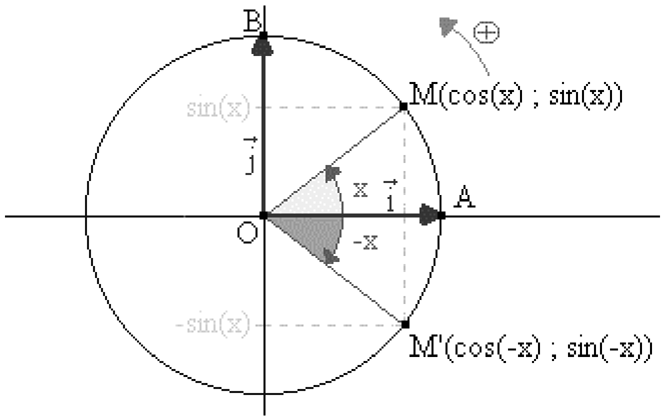
Qu'a-t-il pu déduire de ces données?

Démonstration ou pas?

•L'image ci-dessous est-elle une démonstration du théorème de Pythagore?



•L'image ci-dessous est-elle une démonstration du théorème sin(-x)=-sin(x)?



A institutionnaliser

•Construction mathématique : conjecture, hypothèse, conclusion, hypothèse implicite, contre-exemple, théorème, démonstration

•Sur la différence entre « hypothèse » en sciences expérimentales et en mathématique

•Degrés de liberté dans l'approche du problème: richesse, difficulté!

•Modéliser ... (cf livre de 1ère -> si on donne la formule -> pas de la modélisation, mais de l'illustration)

•Les maths, c'est quoi?

•Induction, déduction, preuve, démonstration ...

Une **preuve** est un argument étayé visant à établir une conclusion. Il existe deux types de preuves épistémologiquement considérées comme valides :

- Les preuves basées sur la déduction qui ont un caractère absolu ou certain pour autant que l'on respecte leurs hypothèses de départ.
- Les preuves basées sur l'induction qui ne sont vraies qu'avec une certaine probabilité dont l'estimation dépend des connaissances disponibles (par exemple, l'estimation de la probabilité qu'une pièce tombe sur un de ses côtés ne sera pas la même s'il est établi à l'avance que la pièce est truquée).

Dans la vie réelle, la plupart des preuves, si elles peuvent comporter des éléments déductifs, contiennent malgré tout un ou des éléments inductifs qui leur confèrent donc un certain niveau d'incertitude. L'évaluation souvent intuitive de ce niveau déterminera alors le niveau de confiance qu'on peut apporter à la preuve. La plupart des preuves utilisées dans la vie courante sont communément admises comme étant dignes de confiance.

Si le niveau de confiance d'une information n'est pas suffisant, on parlera alors de soupçon, de présomption ou d'indice, mais des indices concourants peuvent mutuellement renforcer leur niveaux de confiance et être alors considérés comme équivalents à une preuve et acceptés comme tels. On parlera alors de faisceau de présomptions.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Preuve

En mathématiques, une **démonstration** permet d'établir une assertion à partir de propriétés admises, ou précédemment démontrées, en s'appuyant sur un raisonnement logique. L'assertion une fois démontrée peut ensuite être elle-même utilisée dans d'autres démonstrations. Dans toute situation où les propriétés admises sont vraies, l'assertion démontrée est vraie ; on ne peut la remettre en cause qu'en remettant en cause une ou plusieurs des hypothèses admises ou le système de déduction lui-même. Il est possible de critiquer une démonstration correcte dans un système de déduction auquel on adhère, pour son inélégance, sa lourdeur, ou toute autre raison, mais cela ne remet pas en cause le résultat.

Cette description peut s'avérer idéale. Il arrive qu'une démonstration s'appuie partiellement sur l'intuition, géométrique par exemple, et donc que toutes les propriétés admises, les axiomes, ne soient pas explicites. Les démonstrations de géométrie que l'on peut trouver dans les *Éléments* d'Euclide sont par exemple considérées encore aujourd'hui comme des modèles de rigueur, alors qu'Euclide s'appuie en partie sur des axiomes implicites, comme l'a montré David Hilbert dans ses « fondements de la géométrie ». Par ailleurs, les démonstrations des mathématiciens ne sont pas formelles et une démonstration peut être considérée comme correcte dans les grandes lignes, alors que des points resteraient à expliciter en toute rigueur, voire que d'autres sont entachés d'erreurs « mineures ». On rédige une démonstration pour être lue et convaincre les lecteurs, et le niveau de détails nécessaire n'est pas le même suivant les connaissances de ceux-ci. Cependant avec l'avènement des ordinateurs et des systèmes d'aide à la démonstration, des mathématiciens contemporains rédigent des démonstrations qui sont amenées à être vérifiées par des programmes.

Hors du champ des mathématiques, en droit par exemple, une démonstration intervient comme un complément de preuves, c'est une suite d'arguments énoncés en vue d'emporter l'adhésion de l'auditeur ou du lecteur.

http://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9monstration

Ressources

•Sur le vocabulaire

- cf glossaire sur le site http://ageliaco.org:16004/maths-delley

• Sur la modélisation

- le modèle mathématique
http://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_math%C3%A9matique

- modéliser les tsunamis, entre physique et maths
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00194763/

- en économie: Finance et mathématiques : l'épreuve de la crise
http://www.lesechos.fr/info/analyses/4808265-finance-et-mathematiques-l-epreuve-de-la-crise.htm

- Des mathématiques pour modéliser, conférence d'un chercheur

http://www-c.inria.fr/Internet/ressources/dans-les-lycees/exposes-de-chercheurs/des-mathematiques-pour-modeliser/

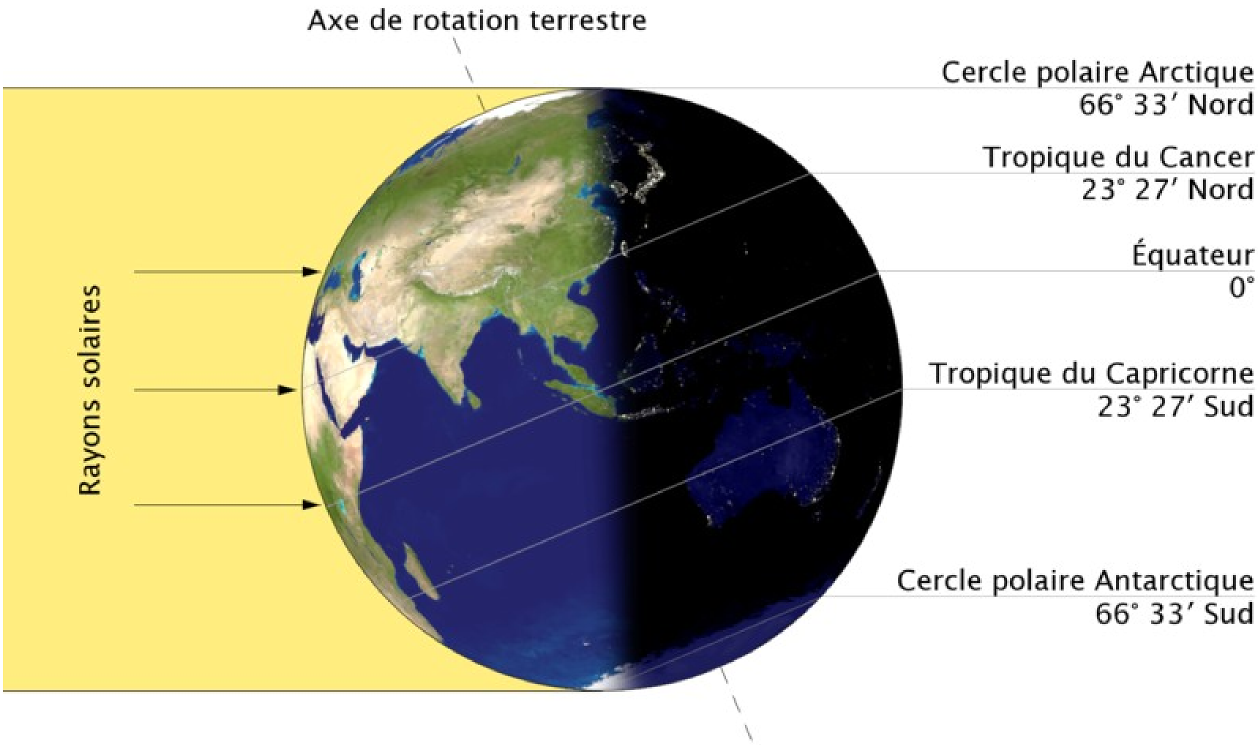
- L'explosion des mathématiques (SMF)

http://smf.emath.fr/Publications/ExplosionDesMathematiques/pdf/smf-smai_explo-maths.pdf

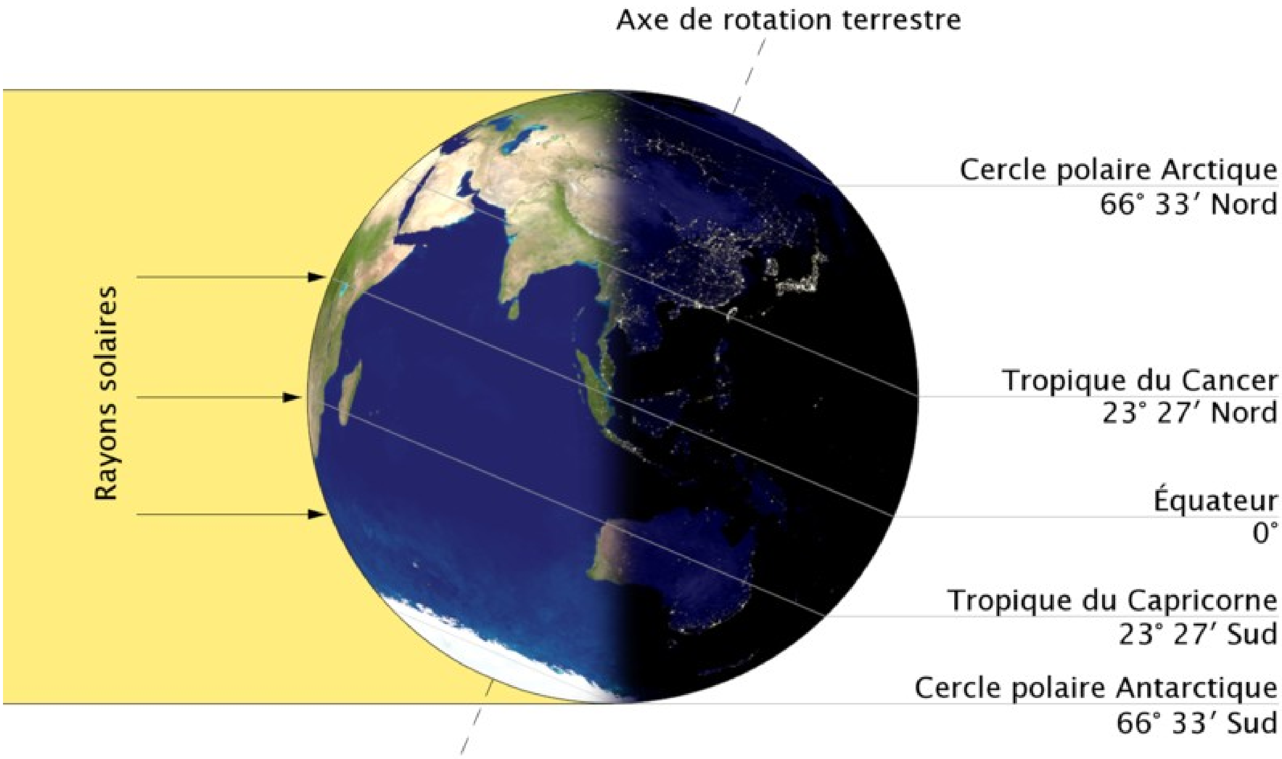
• Etudier les maths à Genève
http://www.unige.ch/math/enseignement/horaires.html

• Sur Erathostène: http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89ratosth%C3%A8ne

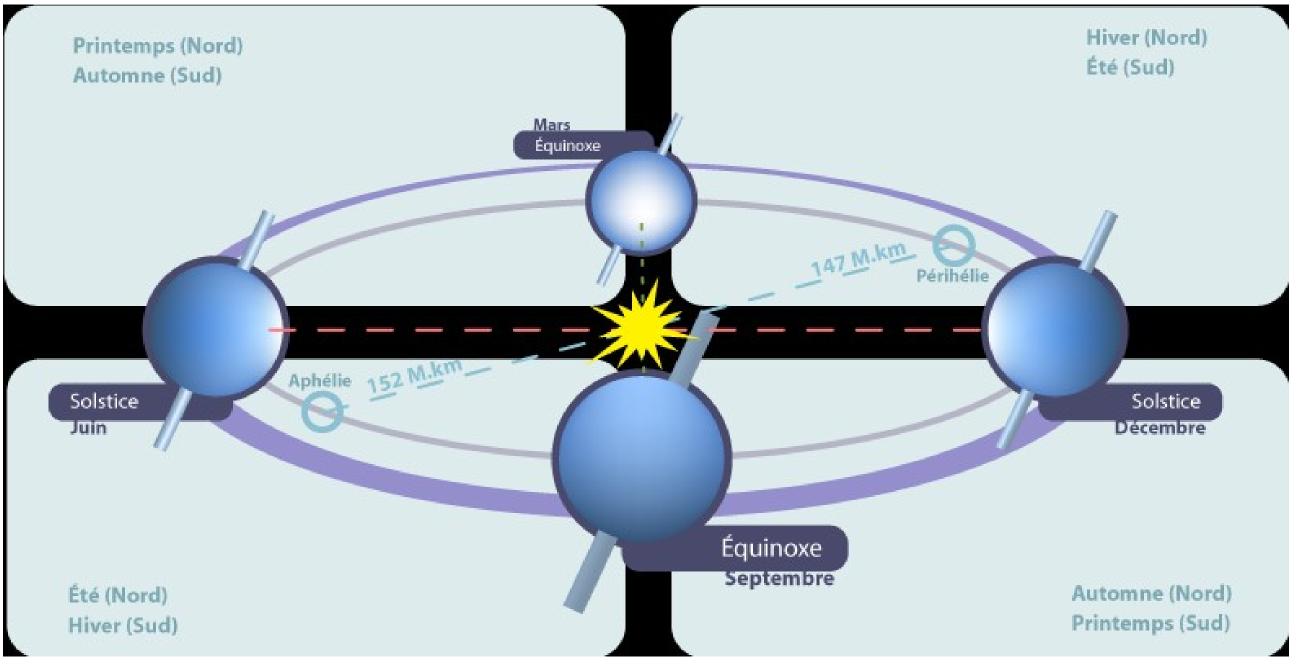
•Astronomie



http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:La_Terre_au_solstice_d%27%C3%A9t%C3%A9.png



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:La_Terre_au_solstice_d%27hiver.png



http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Equinoxes_et_solstices.png

Animation : http://planet-terre.ens-lyon.fr/planetterre/objets/Images/solstice/Eclairement.swf