Épreuve semestrielle de mathématiques

1ère année – Niveau Avancé

Date : 6 juin 2019 **Nombre de pages : 12+1**

Durée : 120 minutes **Nombre de questions : 6**

Cours : 1MA2.DF01;02,03,04,05 **Nombre de points de l'épreuve : 81**

Impression : recto-verso, noir-blanc

Documents et matériel autorisés	
Mis à disposition par le collège :	**Personnel à l'élève :**
Feuilles quadrillées	Calculatrice TI-30 (XS-Pro) ou modèle équivalent (non graphique, non programmable)

Directives :

- Tous les calculs et toutes les étapes de vos raisonnements doivent figurer sur votre copie.
- La boîte à outils pour les justifications en géométrie se trouve en fin d'épreuve. La feuille peut être détachée.
- Tous les résultats doivent être simplifiés au maximum.
- La présentation doit être soignée, l'écriture lisible.
- **Deux points sont attribués à la qualité de la présentation et au respect des notations mathématiques.**

Nom : ______________ **Prénom :** ______________

Groupe : ________

Présentation : / 2 points **Total :** / 81 points

Note :

Question 1 / 21 points

Soient les deux fonctions f et g définies par $f(x)=2(x+1)^2-8$ et $g(x)=(x-1)(3x+5)$

a) Donner pour chacune de ces fonctions :

i. L'ensemble de ses zéros

ii. Les coordonnées de son sommet

iii. Son ordonnée à l'origine

i. L'ensemble de ses zéros

Pour f : $2(x+1)^2-8=0$
$\Leftrightarrow 2(x+1)^2=8$
$\Leftrightarrow (x+1)^2=4$
$\Leftrightarrow x+1=\pm 2$
$\Leftrightarrow x=-1\pm 2$
c.à.d $x_1=-1-2=-3$
$x_2=-1+2=1$
$Z_f=\{-3;1\}$ /2

ou $2(x^2+2x+1)-8=0$
$\Leftrightarrow 2x^2+4x-6=0$
$\Leftrightarrow 2(x^2+2x-3)=0$
$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$
$a=1$ / $b=2$ / $c=-3$
$\Delta=4-4\cdot1(-3)=16$
$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=-1\pm2$
$Z_f=\{-3;1\}$

Pour g : $(x-1)(3x+5)=0$
$x-1=0$ ou $3x+5=0$
$\Leftrightarrow x=1$ $\Leftrightarrow x=-5/3$
$Z_g=\{-\frac{5}{3};1\}$ /2

(/4) ii. Les coordonnées du sommet P

Pour f : forme canonique
$k=-1$ et $m=-8$
$P=(-1;-8)$ /2

Pour g : méthode 1, le sommet est entre les deux zéros
$\Rightarrow k=\frac{(-\frac{5}{3}+1)}{2}=\frac{-2/3}{2}=-\frac{1}{3}$
$g(-\frac{1}{3})=(-\frac{4}{3})\cdot(-1+5)=-\frac{16}{3}$
$P=(-\frac{1}{3};-\frac{16}{3})$ /2

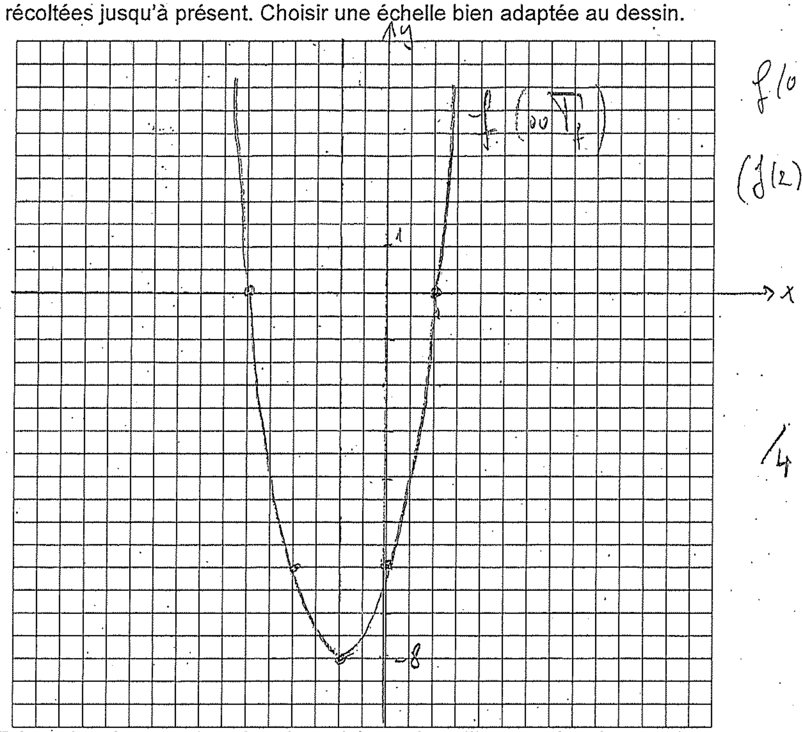
(méthode 2 : avec les formules du sommet après avoir déterminé la forme développée ...)

(/2) iii. L'ordonnée à l'origine

Pour f : $f(0)=2\cdot1-8=-6$ /1

Pour g : $g(0)=(-1)(5)=-5$ /1

b) Représenter graphiquement la fonction f en tenant compte des informations récoltées jusqu'à présent. Choisir une échelle bien adaptée au dessin.



$f(0) = -6$
$= f(-2)$

$(f(2) = 10$
$= f(-3))$

/4

c) Déterminer les coordonnées de tous les points d'intersection des courbes représentatives de f et g.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 8 = (x-1)(3x+5)$ /1

$\Leftrightarrow 2(x^2+2x+1) - 8 = 3x^2 - 3x + 5x - 5$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$ /2

$\Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow -(x-1)^2 = 0$ /3

$\Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = 2(2)^2 - 8 = 0$ 1 (vérif : $1 \in D_g$)

donc $I = (1 ; 0)$ (un unique point d'intersection) /2

Question 2 **/ 9 points**

a) Factoriser le plus possible.

i. $A(x) = -3x^2 - 9x + 30$

ii. $B(x) = x^2(x-1) - (x-1)(x^2 - 4x + 2)$

/2 i. $-3x^2 - 9x + 30 = -3(x^2 + 3x - 10)$
$= -3(x+5)(x-2)$

/3 ii. $x^2(x-1) - (x-1)(x^2-4x+2) = (x-1)[x^2 - (x^2 - 4x + 2)]$
$= (x-1)[4x - 2]$
$= (x-1)\, 2(2x-1)$

b) Résoudre.

i. $\frac{1}{2}(x-2)(x+1)^2 = 0$

ii. $2x + 3 = -x^2$

i. $x - 2 = 0$ ou $(x+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$, $\Leftrightarrow x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1 ; 2\}$ /2

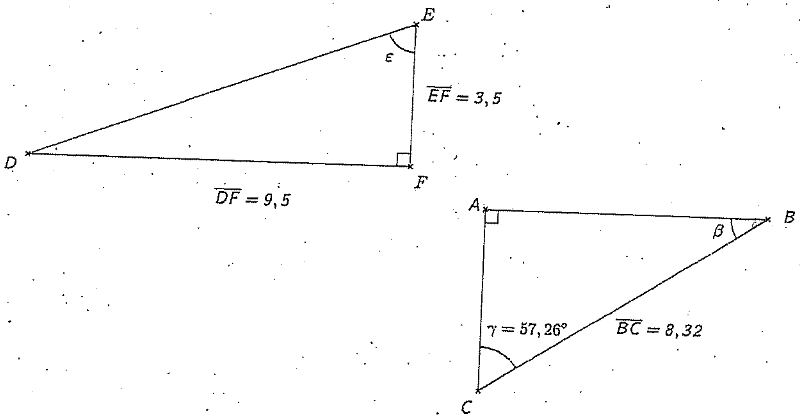
ii. $2x + 3 = -x^2$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$
~~EQ. 4+~~
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$

$S = \emptyset$ /2

Question 3 **/ 7 points**

Déterminer les valeurs demandées, approchées au centième. Les calculs détaillés suffisent comme justification.
Dans les triangles rectangles ci-dessous :

I. Calculer la longueur des segments $[AB]$ et $[AC]$
II. Déterminer les angles β et ε.

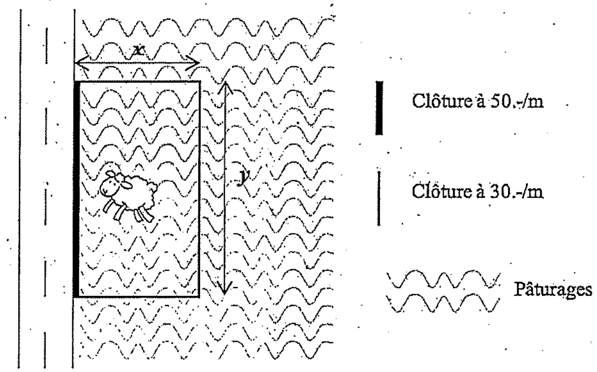


- $\beta = 180 - 90 - 57,26 = 32,74°$ /1
- $\sin \gamma = \frac{\overline{AB}}{8,32} \Leftrightarrow \overline{AB} = 8,32 \cdot \sin(57,26) \cong 7,00$ /2
- $\cos(\gamma) = \frac{\overline{AC}}{8,32} \Leftrightarrow \overline{AC} = 8,32 \cdot \cos(57,26) \cong 4,50$ /2
- $\tan(\varepsilon) = \frac{9,5}{3,5} \Leftrightarrow \varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{9,5}{3,5}\right) \cong 65,78°$ /2

Question 4 **/ 10 points**

On souhaite construire un enclos rectangulaire qui longe une route rectiligne sur l'un de ses côtés. On pose x et y les longueurs en mètres des côtés de l'enclos (voir figure). Une entreprise facture :

- 400 francs de frais de déplacement
- 50 francs le mètre pour clôturer le long de la route
- 30 francs le mètre pour clôturer les autres côtés



(/2) a) Exprimer en fonction de x et y le coût total C facturé par l'entreprise pour construire un enclos.

$C = 400 + y \cdot 50 + 2x \cdot 30 + y \cdot 30 = 400 + 80y + 60x$ /2

(/4) b) Montrer que, si l'on fixe le coût total à 10'000 francs, l'aire A de la surface de l'enclos en fonction de la longueur de son côté x est donnée par la fonction
$A(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 120\,x$

$C = 400 + 80y + 60x = 10000$ /1
$\Leftrightarrow 80y = 9600 - 60x$
$\Leftrightarrow y = 120 - \frac{3}{4}x$ /1
d'où : $Aire = A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(120 - \frac{3}{4}x\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 120x$ /1 /1

Question 4 (suite)

c) Quelle est l'aire maximale de l'enclos que l'on pourra faire construire par cette entreprise pour un montant de 10'000 Frs ?

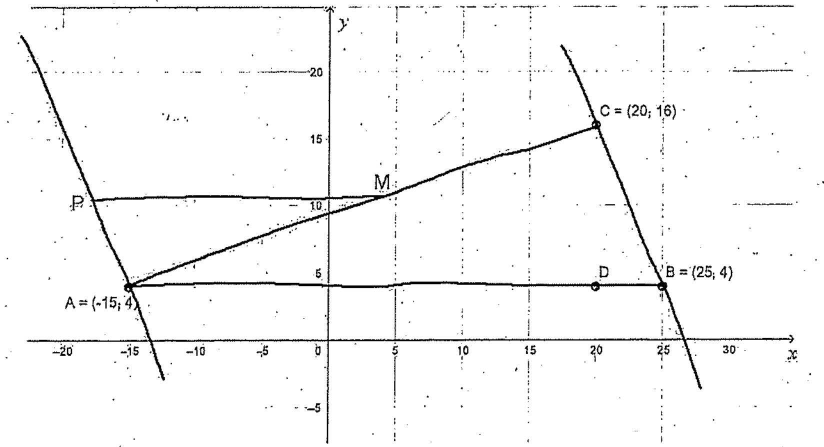
$k = -\frac{b}{2a} = \frac{-120}{-2\cdot(-\frac{3}{4})} = 80$ /3

$m = A(80) = -\frac{3}{4}\cdot 80^2 + 120\cdot 80$ ou $m = -\frac{\Delta}{4a} = \ldots = 4800$

$\overset{\text{"C"}}{=} 4800\ [m^2]$

l'aire maximale est de 4800 m²

Question 5 / 18 points



Sur le croquis ci-dessus, on considère les points $A(-15;4)$, $B(25;4)$ et $C(20;16)$, et le point D sur la droite AB tel que $[CD]$ est perpendiculaire à $[AB]$.

On considère encore les points M et P tels que M se trouve au milieu du segment [AC] et que $d_{AP} // d_{BC}$ et $d_{MP} // d_{AB}$.

Les questions suivantes sont liées entre-elles ; réutilisez vos résultats. Lorsque les justifications sont demandées, servez-vous de la boîte à outils.

a) Sans justifier, déterminer $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ et $\overline{BD}$

$\overline{CD} = 12 - 0 = 12$ / $\overline{AD} = 35$ / $\overline{BD} = 40 - 35 = 5$ /1

b) Déterminer $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ en justifiant.

$\triangle ADC$ rectangle en D [hyp]

donc $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ [théorème Pyth.]

$= 35^2 + 12^2$ ([substitution])

$\Leftrightarrow \overline{AC} \overset{\text{"C"}}{=} 37$

idem pour $\triangle CDB$: $\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2$

$\overline{BC} = 13$

calc : /2

arg : /1

c) Le triangle ABC est-il rectangle ? Justifier.

$\overline{AB}^2 \overset{?}{=} \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 40^2 \overset{?}{=} 13^2 + 37^2$

non

donc $\triangle ABC$ pas rectangle (en C) /1

[par "contraposée théo Pyth."] /1

d) Montrer que les triangles ΔAMP et ΔABC sont semblables en justifiant précisément chaque étape et identifier les côtés correspondants.

- $d_{AP} // d_{BC}$ ([hyp])
  $\widehat{MPA}$ et $\widehat{ABC}$ alternes [déf. alternes]
  donc $\widehat{MPA} = \widehat{ABC}$. [thm alt-int] /2
- idem pour $\widehat{BCA}$ et $\widehat{PAM}$
- ΔAMP et ΔABC ont déjà 2 angles égaux, donc aussi le 3e [thm "Σ ∠ Δ = 180°"] /2

donc $\Delta AMP \sim \Delta ABC$ [déf "∼"] /1

[AP] correspond à [BC]
[MP] " " [AB]
[AM] " [AC] [déf côtés corr.] /2

e) Déterminer $\overline{AP}$ en justifiant.

donc $\frac{\overline{AP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}$ (thm Thalès) /2

càd $\frac{\overline{AP}}{13} = \frac{\overline{MP}}{40} = \frac{37/2}{37}$ ([substitution])

d'où $\frac{\overline{AP}}{13} = \frac{1}{2}$ [eco]

$\Leftrightarrow \overline{AP} = 13/2$
$= 6{,}5$ /1

f) Le triangle ΔAMP est-il semblable au triangle ΔBCD ? Justifier.

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BD}} \overset{?}{=} \frac{\overline{MP}}{\overline{BC}} \overset{?}{=} \frac{\overline{AM}}{\overline{CD}}$ /2

càd $\frac{6{,}5}{5} \overset{?}{=} \frac{\overline{AP}}{13} \overset{?}{=} \frac{37/2}{12}$

non

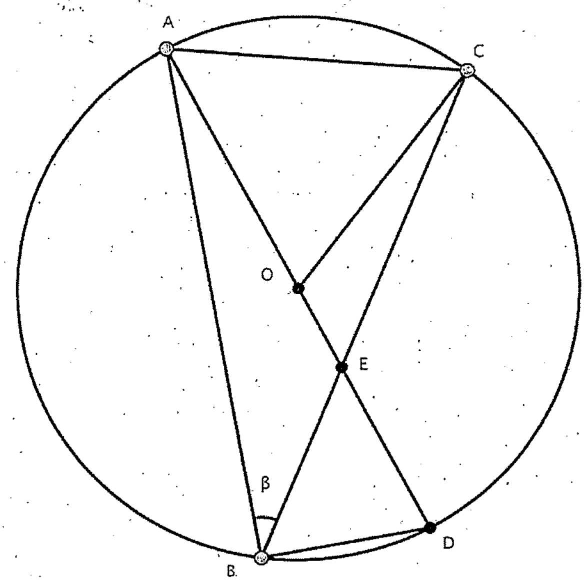
donc $\Delta AMP \not\sim \Delta BCD$ [contrap. thm Thalès]

ou

...

Question 6 **/ 14 points**

Soit un cercle de centre O et de rayon 10 cm. Une corde $[AC]$ est regardée sous un angle de $\beta = 30°$ depuis le point B.
En justifiant précisément votre démarche à l'aide de la boîte à outils :



a) Déterminer les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{AOC}$. Posons $\alpha = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{AOC}$

- $\gamma = 2\beta$ [thm "∠ centre/∠ inscrit"]
  et $\beta = 30°$ ([hyp])
  donc $\gamma = 2 \cdot 30°$ ([substitution]) /2
  $= 60°$
- [AO] diamètre ([hyp])
  et $B \in$ cercle
  donc ΔADB rectangle en B [thm "cercle Thalès"]
  càd $\alpha = 90°$ /2

b) Démontrer que le triangle AOC est équilatéral.

• [OC] et [OA] rayons [hyp]
donc ΔAOC isocèle [déf "Δ isoc"] 1/2
donc $\gamma_1 = \gamma_2$ [thm "Δ isoc"] 1/2
• on a : $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = 180$ [thm "ΣαΔ = 180"]
càd $2\gamma_1 + 60 = 180$
⇔ $\gamma_1 = 60$ ([÷ 60, puis ÷ 2]) 1/2

donc ΔABC équilatéral
[thm "Δ équil"] 1/2

c) Calculer la longueur de la corde $[AC]$.

ΔABC équilatéral (cf (b))
on a : $\overline{AC} = \overline{OA} = \overline{OC}$ [déf "Δ équil"]
or $\overline{OA} = 10$ ([hyp])
donc $\overline{AC} = 10$ cm ([substitution]) 1/2

Boîte à outils de géométrie

Des notions fondamentales

- ☐ le plan, les points, les sous-ensembles de points ;
- ☐ l'appartenance, l'union et l'intersection ;
- ☐ les droites, demi-droites, segments, surfaces,
- ☐ distance entre deux points, longueur, aire, mesure d'un angle.

Des définitions

- ☐ angle, angle plein *[Déf «α plein»]*, angle plat *[Déf «α plat»]*, angle droit *[Déf «α droit»]*
- ☐ angles complémentaires *[Déf «α compl»]*, supplémentaires *[Déf «α suppl»]*, opposés *[Déf «α opp »]*, correspondants *[Déf «α corr»]*, alternes-internes *[Déf «α alt-int»]*
- ☐ droites sécantes, parallèles *[Déf «dr. par.»]*, perpendiculaires *[Déf «dr. perp.»]*
- ☐ triangle, côtés, sommets, côtés opposés ;
- ☐ triangle rectangle *[Déf «Δ rect»]*, isocèle *[Déf «Δ isoc»]*, équilatéral *[Déf «Δ équi»]* ;
- ☐ quadrilatère *[Déf «quadrilatère»]*, trapèze *[Déf «trapèze»]*, parallélogramme *[Déf «parallélogramme»]*, rectangle *[Déf «rectangle»]*, losange *[Déf «losange»]*, carré *[Déf «carré»]* ;
- ☐ polygone (régulier), côtés, sommets
- ☐ côtés correspondants *[Déf «côtés corr »]*, triangles semblables *[Déf «Δ sembl »]*
- ☐ cercle (centre, rayon), disque, secteur, longueur d'arc, angle au centre, angle inscrit, tangente

Des notations

- ☐ angle : $\widehat{ABC}$ ou $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \ldots$
- ☐ triangle : ΔABC et les notations usuelles dans le triangle
- ☐ triangles semblables : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Un axiome important

- ☐ relation entre angles correspondants et parallélisme des droites qui les portent *[Ax «α corr»]*

Des théorèmes démontrés

- ☐ sur les angles opposés *[Thm «α opp»]*
- ☐ relation entre angles alternes-internes et parallélisme des droites qui les portent *[Thm «α alt-int»]*
- ☐ somme angles d'un triangle *[Thm «ΣαΔ=180»]*
- ☐ théorème de Thalès *[Thm «Thales»]* et sa contraposée *[Thm «contr-Thales»]*
- ☐ théorème de Pythagore *[Thm «Pyth»]* et sa contraposée *[Thm «contr-Pyth»]*
- ☐ théorème de la hauteur *[Thm «hauteur»]* et théorème d'Euclide *[Thm «Euclide»]*
- ☐ théorème angles au centre et inscrit [*Thm «α centre/inscrit»*]
- ☐ théorème angles inscrits [*Thm «α inscrits»*]
- ☐ théorème cercle de Thalès *[Thm «cercle de Thales»]*

Des théorèmes non démontrés

- ☐ aires des quadrilatères *[thm «aires»]*
- ☐ les côtés opposés d'un parallélogrammes sont de longueurs égales *[thm «parallélogr.»]*
- ☐ angles dans un triangle isocèle *[thm«Δ isoc»]*
- ☐ angles dans un triangle équilatéral *[thm«Δ équi»]*
- ☐ réciproque du thm de Thalès *[thm «récipr-Thales»]* et sa contraposée *[thm « contr-récipr-Thales»]*
- ☐ réciproque du thm de Pythagore *[thm «récipr-Pyth»]* et sa contraposée *[thm « contr-récipr-Pyth»]*
- ☐ relation mesure d'angle, longueur d'arc, aire du secteur dans un disque *[thm «rel. α/arc/sect»]*
- ☐ théorème tangente au cercle [*Thm «tg cercle»*]