Épreuve semestrielle de mathématiques

1ère année – Niveau Avancé

Date : 6 juin 2019

Durée : 120 minutes

Cours : 1MA2.DF02,04,05

Nombre de pages : 13

Nombre de questions : 6

Nombre de points de l'épreuve : 81

Impression : recto-verso, noir-blanc

Documents et matériel autorisés	
Mis à disposition par le collège :	**Personnel à l'élève :**
Feuilles quadrillées	Calculatrice TI-30 (XS-Pro) ou modèle équivalent (non graphique, non programmable)

Directives :

- Tous les calculs et toutes les étapes de vos raisonnements doivent figurer sur votre copie.
- La boîte à outils pour les justifications en géométrie se trouve en fin d'épreuve. La feuille peut être détachée.
- Tous les résultats doivent être simplifiés au maximum.
- La présentation doit être soignée, l'écriture lisible.
- **Deux points sont attribués à la qualité de la rédaction et au respect des notations mathématiques.**

Nom : ______________________ **Prénom :** ______________________

Groupe : ________ **Total :** **/ 81 points**

Note :

Question 1 **/ 21 points**

Soient les deux fonctions f et g définies par $f(x)=2(x+1)^2-8$ et $g(x)=(x-1)(3x+5)$.

a) Donner pour chacune de ces fonctions :
   i. L'ensemble de ses zéros
   ii. Les coordonnées du sommet.
   iii. L'ordonnée à l'origine.

b) Représenter graphiquement de façon précise ces deux fonctions en tenant compte des informations récoltées jusqu'à présent.

c) Déterminer les coordonnées de tous les points d'intersection des courbes représentatives de f et g.

Question 2 **/ 9 points**

a) Factoriser le plus possible.

i. $-3x^2-9x+30$

ii. $x^2(x-1)-(x-1)(x^2-4x+2)$

b) Résoudre.

i. $\frac{1}{2}(x-2)(x+1)^2=0$

ii. $2x+3=-x^2$

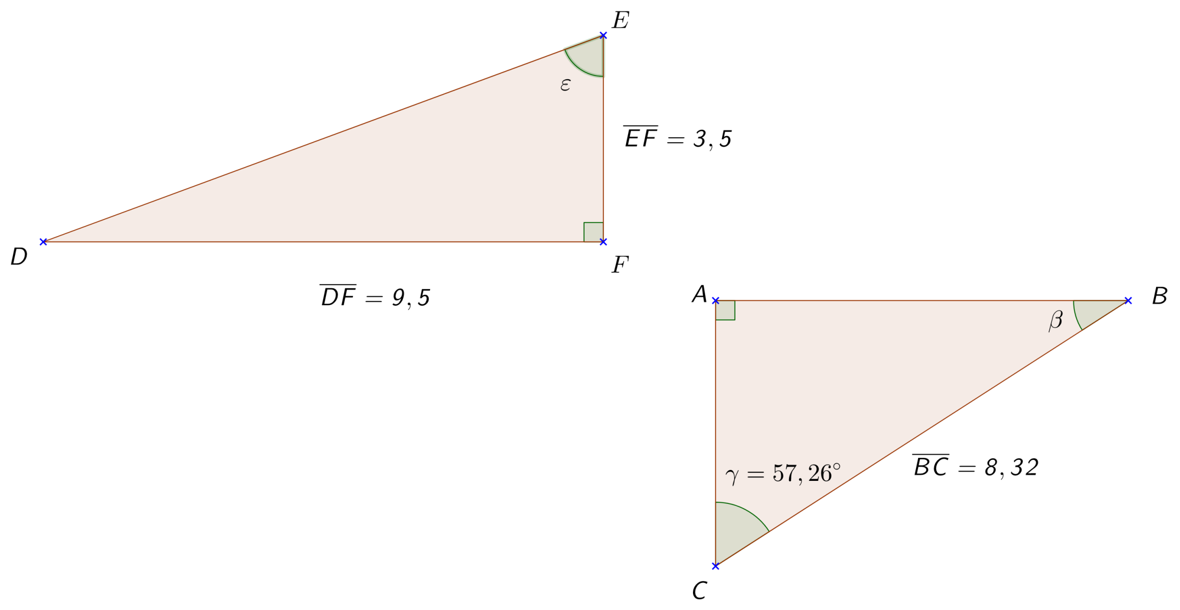
Question 3 **/ 7 points**

Déterminer les valeurs demandées, arrondies au centième. Les calculs détaillés suffisent comme justification.

Dans les triangles rectangles ci-dessous :

i. calculer la longueur des segments $[AB]$ et $[AC]$;

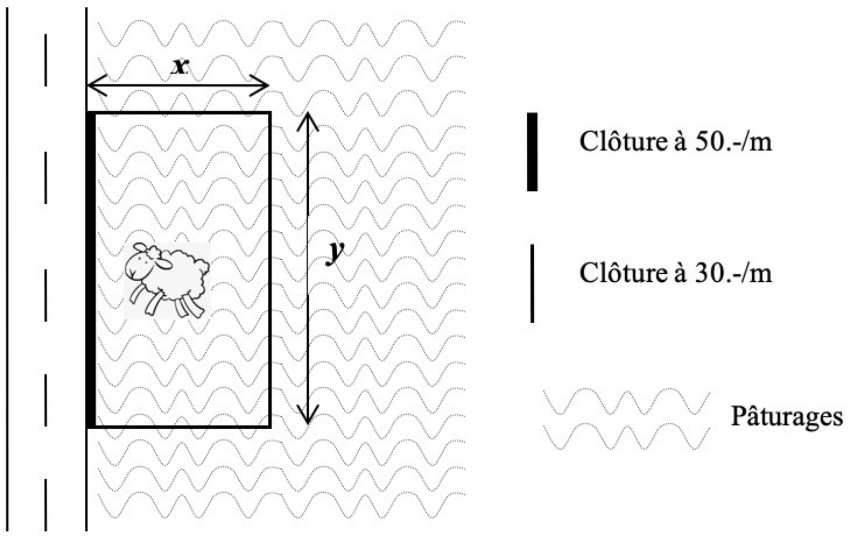
ii. déterminer la mesure des angles β et ε.



Question 4 **/ 10 points**

On souhaite construire un enclos rectangulaire qui longe une route rectiligne sur l'un de ses côtés. On pose x et y les longueurs en mètres des côtés de l'enclos (voir figure). Une entreprise facture :

- 400 francs de frais de déplacement
- 50 francs le mètre pour clôturer le long de la route
- 30 francs le mètre pour clôturer les trois autres côtés



a) Exprimer en fonction de x et y le coût total C facturé par l'entreprise pour construire un enclos.

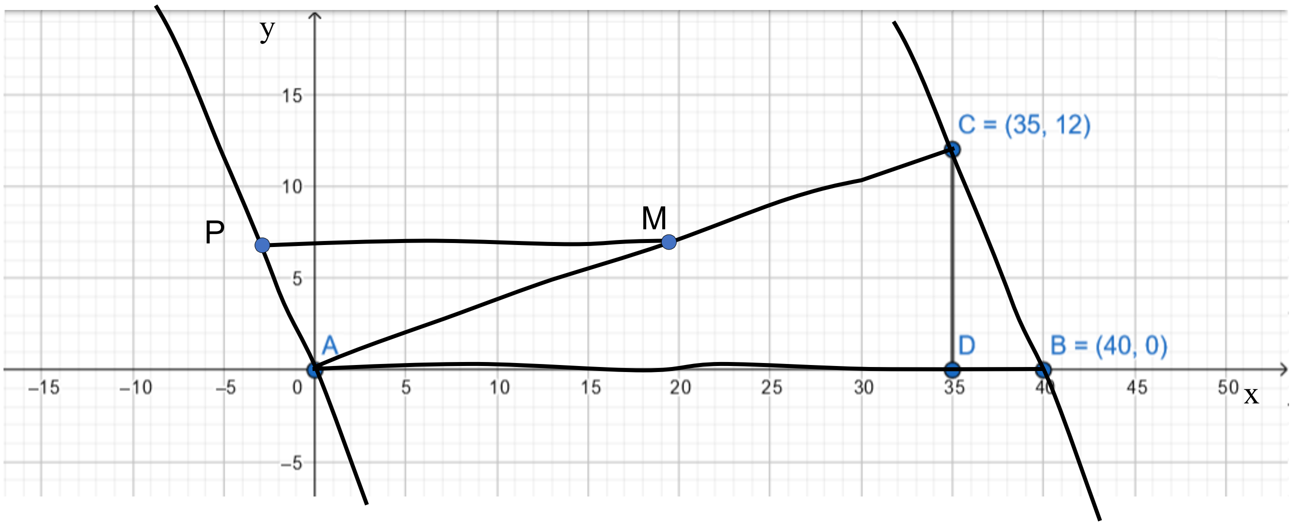
b) Montrer que, si l'on fixe le coût total à 10'000 francs, l'aire A de la surface de l'enclos en fonction de la longueur de son côté x est donnée par la fonction

$$A(x) = \frac{-3}{4}x^2 + 120x$$

Question 4 (suite)

c) Quelle est l’aire maximale de l’enclos que l’on pourra faire construire par cette entreprise pour un montant de 10'000 Frs ?

Question 5 **/ 18 points**



Sur le croquis ci-dessus, on considère les points $A(0\,;0)$, $B(40\,;0)$ et $C(35\,;12)$, et le point D sur l'axe des abscisses tel que $[CD]$ est perpendiculaire à $[AB]$.
On considère encore les points M et P tels que M se trouve au milieu du segment, $d_{MP} \| d_{AB}$ et $d_{AP} \| d_{BC}$.

Les questions suivantes sont liées entre-elles, réutilisez vos résultats. Lorsque les justifications sont demandées, aidez-vous de la boîte à outils.

a) Sans justifier, déterminer $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ et $\overline{BD}$.

b) Déterminer les longueurs des segments $[AC]$ et $[BC]$ en justifiant.

c) Le triangle $\Delta\, ABC$ est-il rectangle en C ? Justifier.

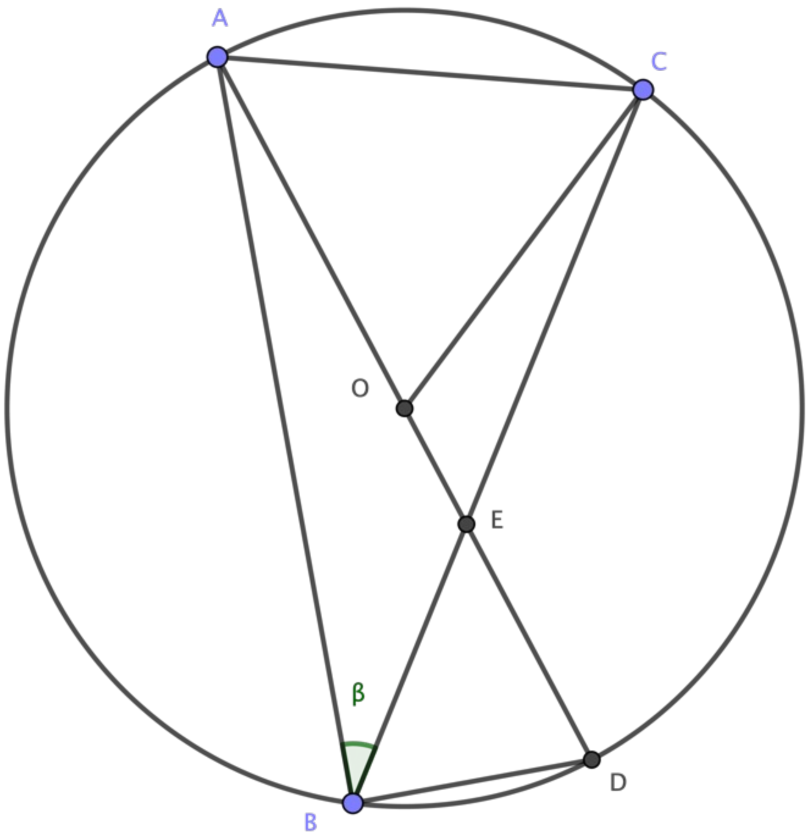
d) Montrer que les triangles ΔAMP et ΔABC sont semblables et identifier les côtés correspondants en justifiant précisément chaque étape.

e) Déterminer $\overline{AP}$ en justifiant.

f) Le triangle ΔAMP est-il semblable au triangle ΔBCD ? Justifier.

Question 6 **/ 14 points**

Soit un cercle de centre O et de rayon 10 cm. Une corde $[AC]$ est regardée sous un angle de $\beta = 30°$ depuis le point B. En justifiant précisément votre démarche à l'aide de la boîte à outils :



a) Déterminer les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{AOC}$.

b) Démontrer que le triangle $\Delta\, AOC$ est équilatéral.

c) Déterminer la longueur de la corde $[AC]$.

Boîte à outils de géométrie

Des notions fondamentales

☐ le plan, les points, les sous-ensembles de points ;
☐ l'appartenance, l'union et l'intersection ;
☐ les droites, demi-droites, segments, surfaces,
☐ distance entre deux points, longueur, aire, mesure d'un angle.

Des définitions

☐ angle, angle plein *[Déf «α plein»]*, angle plat *[Déf «α plat»]*, angle droit *[Déf «α droit»]*
☐ angles complémentaires *[Déf «α compl»]*, supplémentaires *[Déf «α suppl»]*, opposés *[Déf «α opp »]*, correspondants *[Déf «α corr»]*, alternes-internes *[Déf «α alt-int»]*
☐ droites sécantes, parallèles *[Déf «dr. par.»]*, perpendiculaires *[Déf «dr. perp.»]*
☐ triangle, côtés, sommets, côtés opposés ;
☐ triangle rectangle *[Déf «Δ rect»]*, isocèle *[Déf «Δ isoc»]*, équilatéral *[Déf «Δ équi»]* ;
☐ quadrilatère *[Déf «quadrilatère»]*, trapèze *[Déf «trapèze»]*, parallélogramme *[Déf «parallélogramme»]*, rectangle *[Déf «rectangle»]*, losange *[Déf «losange»]*, carré *[Déf «carré»]* ;
☐ polygone (régulier), côtés, sommets
☐ côtés correspondants *[Déf «côtés corr »]*, triangles semblables *[Déf «Δ sembl »]*
☐ cercle (centre, rayon), disque, secteur, longueur d'arc, angle au centre, angle inscrit, tangente

Des notations

☐ angle : $\widehat{ABC}$ ou $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon,$ ...
☐ triangle : ΔABC et les notations usuelles dans le triangle
☐ triangles semblables : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Un axiome important

☐ relation entre angles correspondants et parallélisme des droites qui les portent *[Ax «α corr»]*

Des théorèmes démontrés

☐ sur les angles opposés *[Thm «α opp»]*
☐ relation entre angles alternes-internes et parallélisme des droites qui les portent *[Thm «α alt-int»]*
☐ somme angles d'un triangle *[Thm «ΣαΔ=180»]*
☐ théorème de Thalès *[Thm «Thales»]* et sa contraposée *[Thm «contr-Thales»]*
☐ théorème de Pythagore *[Thm «Pyth»]* et sa contraposée *[Thm «contr-Pyth»]*
☐ théorème de la hauteur *[Thm «hauteur»]* et théorème d'Euclide *[Thm «Euclide»]*
☐ théorème angles au centre et inscrit [*Thm «α centre/inscrit»*]
☐ théorème angles inscrits [*Thm «α inscrits»*]
☐ théorème cercle de Thalès *[Thm «cercle de Thales»]*

Des théorèmes non démontrés

☐ aires des quadrilatères *[thm «aires»]*
☐ les côtés opposés d'un parallélogrammes sont de longueurs égales *[thm «parallélogr.»]*
☐ angles dans un triangle isocèle *[thm«Δ isoc»]*
☐ angles dans un triangle équilatéral *[thm«Δ équi»]*
☐ réciproque du thm de Thalès *[thm «récipr-Thales»]* et sa contraposée *[thm « contr-récipr-Thales»]*
☐ réciproque du thm de Pythagore *[thm «récipr-Pyth»]* et sa contraposée *[thm « contr-récipr-Pyth»]*
☐ relation mesure d'angle, longueur d'arc, aire du secteur dans un disque *[thm «rel. α/arc/sect»]*
☐ théorème tangente au cercle [*Thm «tg cercle»*]