Collège de Saussure **Examen semestriel de mathématiques de 1re année, niveau normal**	
Date	20 décembre 2017
Durée	120 minutes
Maître(s), cours et nombre d'élèves	Jean-Marie Delley - 1Ma1.DF01 - 24 élèves Emilie Chappuis – 1Ma1.DF03 – 22 élèves Jean-Marie Delley - 1Ma1.DF05 - 23 élèves Joëlle Steiner – 1Ma1.DF07 – 24 élèves
Nombre de pages	10
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	9
Documents et matériel autorisés	• calculatrice TI30, TI34. TI30XPro ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire les feuilles quadrillées fournies en y ajoutant votre nom ;** • **toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement et/ou un calcul détaillé ;** • **la présentation doit être soignée, l'écriture lisible.**

Nom : .....**Prénom** : .....

Groupe: .....**Cours** : .....

Points obtenus: .....**Note**: .....

Répartition des points

Exercice 1 : 10 points

Exercice 2 : 7 points

Exercice 3 : 4 points

Exercice 4 : 12 points

Exercice 5 : 5 points

Exercice 6: 5 points

Exercice 7: 9 points

Exercice 8: 5 points

Exercice 9: 11 points

Notations : 2 points

Total : 70 points

Exercice 1 (environ 10 points)

Simplifier au maximum en écrivant les étapes et sans laisser de racine ni de puissance négative au dénominateur

(a) $-(-3x-4y-(x-y))-3y = -(-3x-4y-x+y)-3y$

$= -(-4x-3y)-3y$

$= +4x+3y-3y$

$= 4x$

/2

(b) $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{4}{\frac{3}{2}}+2\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(4\cdot\frac{2}{3}+2\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{3}+2\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8+6}{3}\right)$

$= \frac{1}{\cancel{8}_{4}}\cdot\frac{\cancel{14}^{7}}{3} = \frac{7}{12}$

/2

(c) $\frac{x^{-2}\cdot x^{10}}{x^2\cdot(x^3)^2} = \frac{x^8}{x^2\cdot x^6} = \frac{x^8}{x^8} = 1$

/3

(d) $\left(\frac{-2}{\sqrt{8}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{8}-3}\right) = \frac{-2\sqrt{2}+6}{(\sqrt{8})^2-3^2} = \frac{-2\sqrt{2}+6}{8-9} = \frac{-2\sqrt{2}+6}{-1}$

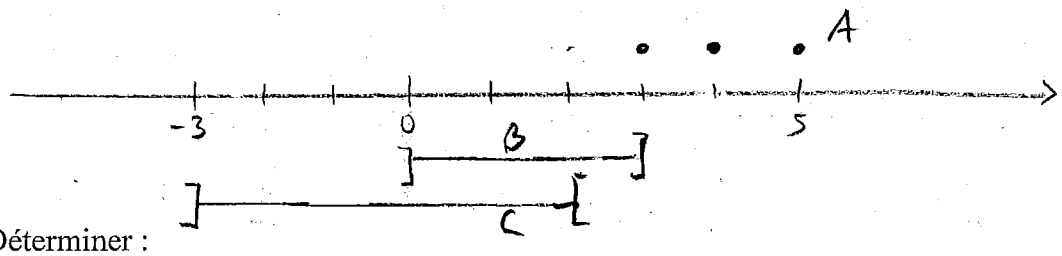
$= 2\sqrt{2}-6$

/3

Exercice 2 (7 points)

Soient les trois ensembles A, B et C définis par :

$$A=\{3;4;5\} \quad ; \quad B=]0;3]; \quad C=\{x\in\mathbb{R} \mid -3<x<2\}$$



(a) Déterminer :

i. $B\cap C =]0;2[$ /1

ii. $B\cup C =]-3;3]$ /1

iii. $B\setminus A =]0;3[$ /1

iv. $B\setminus C =]0;2]$ /1

(b) Parmi les expressions suivantes entourer toutes celles qui sont correctes.

$A=]2:6[$	$B=\{x\in\mathbb{R} \mid 0\leq x<3\}$	$C=]-3:2[$
$C=[-3:2]$	$A\cap B=\{3\}$	$B\not\subseteq C$

/3

Exercice 3 (4 points)

Compléter par le symbole le plus adéquat parmi les suivants : $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$, $\subseteq$, $\not\subseteq$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$

$\frac{2}{3}$ ... $\notin$ ... $\mathbb{Z}$	$\{0\}$ ... $\subseteq$ ... $\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$ ... $\cap$ ... $\mathbb{Z}^*_-=\emptyset$	$\mathbb{Q}$ ... $\cup$ ... $\mathbb{N}^*=\mathbb{Q}$

/4

Exercice 4 (environ 12 points)

On considère la conjecture suivante concernant un entier naturel n :

Conjecture A: « $\underbrace{\text{Si } n \text{ se termine par 4}}_{\text{HYP}}$, alors $\underbrace{n^2 \text{ est multiple de 4}}_{\text{CONCL}}$ » /1

a) Identifier clairement ci-dessus hypothèse(s) et conclusion(s).

b) Vraie ; dém : n se termine par 4 [hyp]

$n = 10k + 4$, où $k \in \mathbb{N}$ [thm "se termine par..."]

donc $n^2 = (10k+4)^2$ [déf "carré"]

$= 100k^2 + 80k + 16$ [ID 1]

$= 4(\underbrace{25k^2 + 20k + 4}_{\in \mathbb{N}})$ [mise en évidence]

[car $k \in \mathbb{N}$]

est mult. de 4 [déf "mult de 4"]

dém. /2½

arg : /2½

c) Enoncer la réciproque de la conjecture A. /1

Si n^2 est multiple de 4, alors n se termine par 4

d) Cette réciproque est elle vraie ou fausse ? Justifier précisément.

Fausse : 36 est le carré de 6, mais 6 ne se termine pas par 4

/2

e) Enoncer la contraposée de la conjecture A.

Si n^2 n'est pas un multiple de 4, alors n ne se termine pas par 4 /1

f) Cette contraposée est elle vraie ou fausse ? Justifier précisément. /2

Vraie car une implication et sa contraposée sont toujours vraies ensemble ou fausses ensemble ; or on a démontré en b) que l'implication est vraie.

Exercice 5 (environ 5 points)

On considère la phrase suivante : « Le produit de deux nombres impairs consécutifs ».

a) La traduire comme une expression mathématique.

Soit $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$) : $(2n+1) \cdot (2n+3)$ /2

On considère la conjecture suivante : « Le produit de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 3 ».

b) L'énoncer sous forme d'une implication.

Si $n \in \mathbb{Z}$ (ou $n \in \mathbb{N}$), alors $(2n+1)(2n+3)$ est multiple de 3 (ou $(2n+1)\cdot(2n+3) = 3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$) /1

c) Est-elle vraie ou fausse ? Justifier précisément.

Fausse, contre-exemple : $n = 2 \Rightarrow (2 \cdot 2+1)(2 \cdot 2+3)$
$= 5 \cdot 7 = 35$
n'est pas multi. de 3 /2

Exercice 6 (environ 5 points)

Coralie a joué 20 parties d'un jeu en ligne. Chaque partie gagnée lui a rapporté 3,50 CHF et chaque partie perdue lui a coûté 2,5 CHF. Au final, elle a gagné 4,00 CHF.

Combien de parties a-t-elle gagnées ?

x : nbre de parties gagnées par Coralie
$20 - x$: " " " perdues

$x \cdot 3{,}5 + (20-x)(-2{,}5) = 4$ réduire

$\Leftrightarrow 3{,}5x - 50 + 2{,}5x = 4$ réduire +50 ⚠ notation

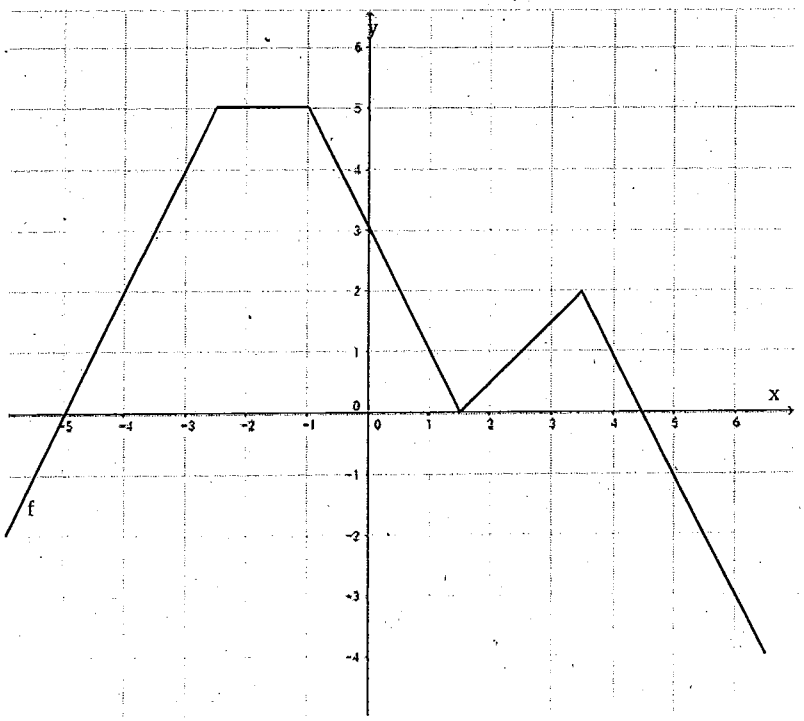
$\Leftrightarrow 6x = 54$ $\div 6$

$\Leftrightarrow x = 9$

Coralie a gagné 9 parties

Exercice 7 (environ 9 points)

Soit la fonction réelle f donnée ci-dessous par une représentation graphique.



Déterminer par lecture graphique :

(a) $f(3) =$ 1,5 /1

(b) $f^{-1}(1) =$ {-4,5 ; 1 ; 2,5 ; 4} /2

(c) L'ensemble des zéros de f est {-5 ; 1,5 ; 4,5} /2

(d) L'ordonnée à l'origine de f est 3 /1

(e) L'ensemble des préimages de 6 par f est ∅ /1

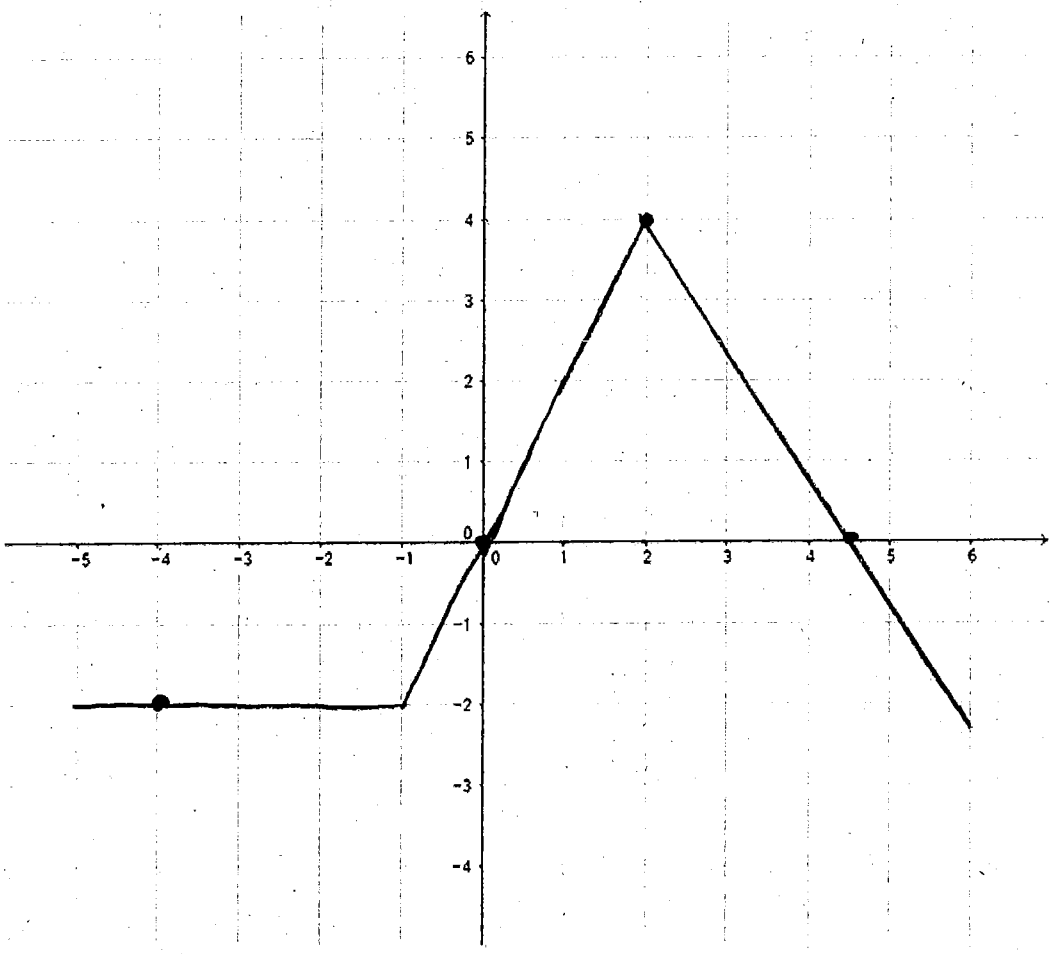
(f) Le tableau des signes de f est :

x		-5		1,5		4,5	
$f(x)$	−	0	+	0	+	0	−

Exercice 8 (6 points)

Sur le repère ci-dessous, tracer la représentation graphique d'une même fonction f définie sur [-5;6] qui possède simultanément toutes les propriétés suivantes :

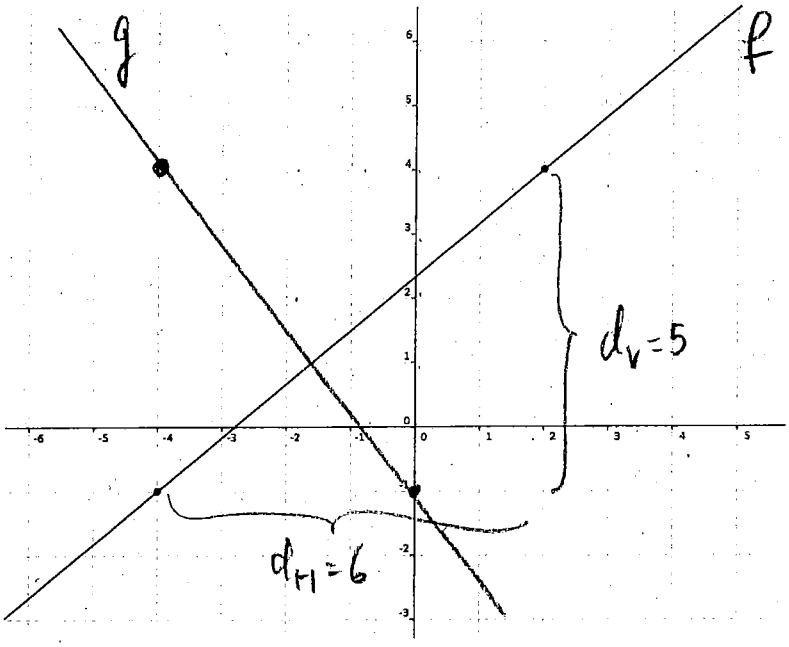
- l'ensemble de ses zéros est $Z_f = \{0; 4,5\}$; /1
- f est constante pour $-5 \leq x \leq -1$ /1
- f est linéaire sur l'intervalle [-1;2] ; /1
- l'unique préimage de 4 par f est 2 ; /1
- f est affine pour $x \in [2;6]$. /1



Exercice 9 (environ 11 points)

On considère deux fonctions f et g :

- une représentation graphique de f est donnée ci-dessous. Elle passe exactement par les deux points marqués en gras
- La fonction g est donnée par son expression algébrique
  $g(x)=-\frac{5}{4}x-1$



(a) Déterminer par un calcul le zéro de g.

$g(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x-1=0 \quad +1$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{4}x=1 \quad \cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}$

$\mathcal{L}=\left\{-\frac{4}{5}\right\}$

/3

(b) Tracer une représentation graphique de la fonction g dans le même repère. /2

(c) Donner l'expression algébrique de f.

pente de $f = \frac{d_V}{d_H} = \frac{5}{6} \Rightarrow$ équation de f : $y = \frac{5}{6}x + q$ /1

$(2;4) \in$ courbe repr. de $f \Leftrightarrow 4 = \frac{5}{\cancel{6}_{3}} \cdot \cancel{2} + q$ simplification

$\Leftrightarrow 4 = \frac{5}{3} + q$ $-\frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow 4 - \frac{5}{3} = q$ dén. commun

$\Leftrightarrow \frac{12-5}{3} = q$

$\Leftrightarrow q = \frac{7}{3}$ /2

d'où : $y = \frac{5}{6}x + \frac{7}{3}$ /1

(d) La courbe représentative de f est-elle perpendiculaire à celle de g ? Justifier par un calcul.

pente de $f = \frac{5}{6}$

pente de $g = -\frac{5}{4}$

$\frac{5}{6} \cdot \frac{-5}{4} = -\frac{25}{24} \neq 1$, donc les droites ne sont pas perpendiculaires /2