Collège de Saussure

Examen semestriel de mathématique - Première année - Niveau avancé

Date : 17 janvier 2008

Durée : 90 minutes

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 1Ma2DF5

Nom de l'élève : ....

Prénom de l'élève : ....

Matériel autorisé

- Calculatrice non programmable personnelle (en principe TI34II)

Remarques

- Répondre sur l'énoncé, joindre si nécessaire un brouillon
- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Informations chiffrées après correction du maître

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ ...... / 2

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ ...... / 2

Total des points des exercices : .... / 79

Total des points de l'épreuve : .... / 81

Barème

1.5	**2**	**2.5**	**3**	**3.5**	**4**	**4.5**	**5**	**5.5**	**6**
	18	25	32	39	46	54	61	68	75

Note : / 6

Commentaires du maître sur le travail

Commentaires de l'élève sur son travail

Début du travail

Exercice 1(environ 5 points)

5 vaches produisent 70 litres de lait en 2 jours, combien de temps (en jours,heures, minutes, secondes) faut-il à 2 vaches pour produire 50 litres de lait ?

[/5]

facteur 2/5

5 vaches | 70 litres | 2 jours

2 vaches | 70 l. | $\frac{5}{2}\cdot 2\,j = 5\,j$

2 vaches | 50 l | $5\cdot\frac{5}{7} = \frac{25}{7}\,j$ fact $\frac{5}{7}$

ou

5 v 70 l 2 j

1 v 14 l 2 j

2 v 28 l 2 j

$\frac{50}{28}$ 2 v 50 l $2\cdot\frac{50}{28} = \frac{25}{7}$

$\frac{25}{7}\,j \simeq 3\,j\ 13\,h\ 42'\ 52''$

5

Exercice 2(environ 9 points)

[/9]

(a) Simplifier l'écriture au maximum de sorte qu'il n'y ait aucune racine au dénominateur

i. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{75}{48}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

2

ii. $\frac{-4}{\sqrt{8}}+\frac{1}{2} = -\frac{4\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}+\frac{1}{2} = -\frac{4\sqrt{8}}{8}+\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{8}}{2}+\frac{1}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2} = -\sqrt{2}+\frac{1}{2}$

$\left(= \frac{-2\sqrt{2}+1}{2}\right)$

3

(b) Simplifier le plus possible et de sorte qu'il n'y ait aucun exposant négatif dans la réponse (x et y sont des nombres réels non nuls) :

$$\frac{(x^3)^{-6}\cdot(y\cdot x^4)^3}{(x^5\cdot x^{-1})^{-6}\cdot(x^3)^6}\cdot y^{-3} = \frac{x^{-18}y^3x^{12}y^{-3}}{x^{-30}x^6x^{18}} = \frac{x^{-6}}{x^{-6}} = 1$$

4

/8

Exercice 3(environ 8 points)

Traduire en langage mathématique :

(a) l'ensemble des nombres rationnels est inclu dans l'ensemble des nombres réels

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

(b) moins trois quarts n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers relatifs

$$-\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$$

(c) l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à $\frac{\pi}{2}$

$$]-\infty ; \frac{\pi}{2}]$$

(d) l'ensemble des réels strictement compris entre le nombre réel a et son opposé.

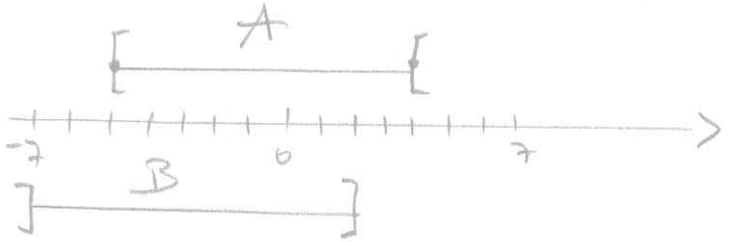
$$]-a ; a[$$

/8

Exercice 4(environ 8 points)

Soients A et B les deux ensembles suivants : A=[-5;4 [et B=]-7;2]

(a) Représenter A et B sur une même droite réelle:



(2)

(b) Déterminer :

i. $A \cup B$ = $]-7 ; 4[$ (1)

ii. $A \cap B$ = $[-5 ; 2]$ (2)

iii. $A \setminus B$ = $]2 ; 4[$ (2)

Exercice 5(environ points)

[/12]

Soit x une variable réelle.
On considère l'expression suivante : $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

(a) L'expression $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$ est une somme / un produit [entourer la bonne réponse]

(b) $(x+3)(2-x)(2+x)$ et $(4-x^2)(x^2-9)$ sont les ...termes...... de l'expression [compléter]

(c) L'expression $(4-x^2)(x^2-9)$ est une somme / un produit [entourer la bonne réponse]

(d) $4-x^2$ et (x^2-9) sont les ...facteurs...... de l'expression[compléter] $(4-x^2)(x^2-9)$ (4)

(e) Développer le plus possible et simplifier au maximum l'écriture :

$(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

$= (x+3)(4-x^2) + 4x^2 - x^4 - 36 + 9x^2$

$= 4x + 12 - x^3 - 3x^2 + 4x^2 - x^4 - 36 + 9x^2$

$= -x^4 - x^3 + 10x^2 + 4x - 24$ (4)

(f) Factoriser le plus possible :

$(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

$= (x+3)(4-x^2) + (4-x^2)(x+3)(x-3)$

$= (x+3)(4-x^2)[1 + (x-3)]$

$= (x+3)(2-x)(2+x)(x-2)$ (4)

Exercice 6(environ 10 points)

[/10]

Soit x une variable réelle.
Résoudre les équations suivantes en donnant les réponses exactes simplifiées au maximum et les réponses approchées arrondies au millième :

(a) $\frac{x}{5}-\frac{3x-2}{15}=\frac{1-x}{3} \Leftrightarrow \frac{3x}{15}-\frac{3x-2}{15}=\frac{5(1-x)}{15}$

$\Leftrightarrow \frac{3x-3x+2}{15}=\frac{5-5x}{15}$

$\Leftrightarrow 2=5-5x$

$\Leftrightarrow 5x=3$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$

$S=\{\frac{3}{5}\}=\{0,6\}$

5

(b) $2x^3= x^2+10x \Leftrightarrow 2x^3-8x^2-10x=0$

$\Leftrightarrow 2x(x^2-4x-5)=0$

$\Leftrightarrow 2x(x-5)(x+1)=0$

$2x=0$ ou $x-5=0$ ou $x+1=0$
$x=0$ $x=5$ $x=-1$

$S=\{-1;0;5\}$

5

Exercice 7(environ 9 points)

[/9]

(a) Résoudre l'équation suivante en donnant les réponses exactes simplifiées au maximum et les réponses approchées arrondies au millième:

$x(x+4)=2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4x-2=0$

$\Delta = b^2-4ac = 16-4\cdot1\cdot(-2) = 24$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4\pm\sqrt{24}}{2} = \frac{-4\pm2\sqrt{6}}{2} = -2\pm\sqrt{6}$

$S=\{-2-\sqrt{6}\,;\,-2+\sqrt{6}\}$

$\simeq\{-4,45\,;\,0,45\}$

5

(b) Pour quelles valeurs de m ($m\in\mathbb{R}$) l'équation $x(x+4)=m$ admet-elle une unique solution ?

$x^2+4x-m=0$

$\Delta = b^2-4ac = 16-4\cdot1\cdot m = 16-4m$

$\Delta=0 \Leftrightarrow 16-4m=0 \Leftrightarrow m=4$: une unique solution

4

Exercice 8 *(environ 9 points)*

[/9]

On considère les conjectures suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Conjecture 1 : Si a et b sont des nombres réels positifs, alors $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

fausse

Contre-exemple : $a=1$ et $b=1$

$\sqrt{1^2+1^2} \overset{?}{=} 1+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \overset{?}{=} 2$

non

1+3

(b)Conjecture 3 : La différence des carrés de deux nombres pairs consécutifs est toujours un multiple de 4.

vraie

démonstration : soient $2n$ et $2n+2$ deux nbres pairs consécutifs

$$(2n+2)^2-(2n)^2 = 4n^2+8n+4-4n^2$$
$$= 8n+4$$
$$= 4(2n+1) \text{ est un multiple de } 4$$

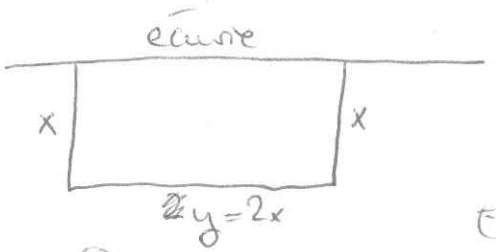
(1+4)

Exercice 9(environ 8 points)

/8

Un fermier projette de clôturer un terrain rectangulaire, utilisant l'écurie pour border un côté et une barrière pour les trois autres côtés. Si le côté parallèle à l'écurie vaut deux fois la longueur d'un côté adjacent, et si l'aire du terrain est de $128\,m^2$, combien de mètres de barrière doit-il acheter ?

Faire un schéma pour représenter la situation.



(2)

x : côté adjacent

$x \cdot y = 128$ (2)

$\Leftrightarrow x(2x) = 128$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 128$

$\Leftrightarrow x^2 = 64$

$\Leftrightarrow x = \pm 8$ (2)

Comme x est une longueur, $x = 8$ [m]

Donc il faut acheter $x + 2x + x = 4x = 4 \cdot 8 = 32$ m de barrière. (2)