

Début du travail

Exercice 1 (environ 8 points)

Soient x et y des variables réelles.

Développer les expressions suivantes et les réduire au maximum :

[18]

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad (x^2 - y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 &= (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\
 &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - x^4 - 2x^2y^2 - y^4 \\
 &= -4x^2y^2 \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad x - (1 - x - (y - 2x - (y + 2) - 1) - x) + y &= \\
 &= x - (1 - x - (y - 2x - y - 2 - 1) - x) + y \\
 &= x - (1 - x - (-2x - 3) - x) + y \\
 &= x - (1 - x + 2x + 3 - x) + y \\
 &= x - (4) + y \\
 &= x + y - 4 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Exercice 2 (environ 16 points)

Soient x , a et b des variables réelles.

Factoriser les expressions suivantes et les réduire au maximum :

[16]

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad 7a^3b + 7ab^3 - 14a^2b^2 &= 7ab(a^2 + b^2 - 2ab) \\
 &= 7ab(a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= 7ab(a - b)^2 \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad 81x - x^3 &= x(81 - x^2) = x(9 - x)(9 + x) \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & (7x-1)(2x^2+3)-(3x^2+2)(7x-1) \\
 &= (7x-1) [(2x^2+3)-(3x^2+2)] \\
 &= (7x-1) (-x^2+1) \\
 &= (7x-1) (1-x^2) \\
 &= (7x-1) (1-x)(1+x) \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & (x^4+1)^2 - (1-x^4)^2 = [(x^4+1)-(1-x^4)][(x^4+1)+(1-x^4)] \\
 &= [x^4+1-1+x^4][x^4+1+1-x^4] \\
 &= 2x^4 \cdot 2 \\
 &= 4x^4 \quad (4)
 \end{aligned}$$

Exercice 3 (environ 25 points)

Soit x une variable réelle.

Résoudre les équations suivantes en donnant les réponses sous forme exacte simplifiée au maximum et sous forme approchée arrondie au centième :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \frac{x+3}{4} - \frac{2x}{3} = \frac{3-x}{6} \Leftrightarrow \frac{3(x+3)}{12} - \frac{4(2x)}{12} = \frac{2(3-x)}{12} \\
 & \Leftrightarrow \frac{3(x+3) - 4(2x)}{12} = \frac{2(3-x)}{12} \\
 & \Leftrightarrow 3(x+3) - 4 \cdot 2x = 2(3-x) \\
 & \Leftrightarrow 3x+9 - 8x = 6 - 2x \\
 & \Leftrightarrow -3x = -3 \\
 & \Leftrightarrow x = 1 \quad S = \{1\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & 36 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 6 \\
 & S = \{\pm 6\} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$(c) \quad -11x^2 = 2 \cdot (-3x^2) \Leftrightarrow -11x^2 = -6x^2$$

$$\Leftrightarrow -11x^2 + 6x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$S = \{0\} \quad (3)$$

$$(d) \quad x^2 = -8x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 6) \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 112$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{112}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16 \cdot 7}}{2}$$

$$= \frac{-8 \pm 4\sqrt{7}}{2} = \frac{2(-4 \pm 2\sqrt{7})}{2} = -4 \pm 2\sqrt{7}$$

$$S = \{-4 - 2\sqrt{7}; -4 + 2\sqrt{7}\}$$

$$\approx \{-9,29; 1,29\}$$

(5)

$$(e) \quad -2x^2 + 6x = 4 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$S = \{1, 2\} \quad (4)$$

$$(f) \quad x^2 + \sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow x(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{2} = 0$$

$$x = -\sqrt{2}$$

$$S = \{-\sqrt{2}; 0\}$$

$$\approx \{-1,41; 0\}$$

(4)

$$(g) \quad x^2 + 4x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 16 - 4 \cdot 9 < 0$$

$$S = \emptyset$$

(2)

Exercice 4 (environ 7 points)

Résoudre l'équation suivante en donnant toutes les étapes de la complétion du carré.

Donner les réponses sous forme exacte simplifiée au maximum et sous forme approchée arrondie au centième :

$$x^2 + 8x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = -9 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 7 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x+4 = \pm\sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \pm \sqrt{7}$$

$$S = \left\{ -4 - \sqrt{7}; -4 + \sqrt{7} \right\} \quad (2)$$

$$\approx \left\{ -6,65; 1,35 \right\} \quad (1)$$

Exercice 5 (environ 8 points)

Un représentant de commerce estime que sa voiture consomme en moyenne 8,57 litres/100 km sur l'autoroute et 10,91 litres/100 km en ville. Lors d'un voyage récent, il a parcouru 1'003,2 km et utilisé 92,15 litres d'essence.

Quelle partie du voyage a-t-il passée à rouler en ville ?

- $x =$ nbre de km parcourus en ville
 $y =$ " " " " sur autoroute

$$x \cdot \frac{10,91}{100} + y \cdot \frac{8,57}{100} = 92,15 \quad (4)$$

nbre de litres en ville
nbre de litres sur autoroute
nbre total de litres

on sait que $x+y = 1003,2 \Leftrightarrow y = 1003,2 - x$

$$x \cdot 0,1091 + (1003,2 - x) \cdot 0,0857 = 92,15 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow 0,0234x = 6,17576$$

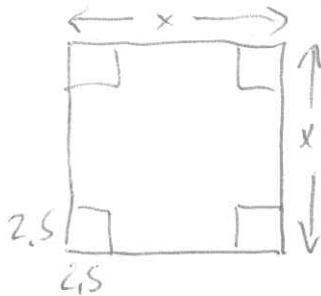
$$\Leftrightarrow x \approx 263,9 \text{ km}$$

Il a parcouru environ 263,9 km en ville.

Exercice 6 (environ 9 points)

On veut construire une boîte (ouverte sur le haut) de base carrée à partir d'une feuille de carton en coupant 4 carrés de 2,5 dm de côté à chaque coin et en pliant les côtés. Quelles seront les dimensions de la feuille de carton utilisée si on veut que la boîte mesure

40 dm³ ?



$x =$ largeur de la feuille

$$[x - 2,5 \cdot 2]^2 \cdot 2,5 = 40 \quad (4)$$

$$(x - 5)^2 = 16$$

$$x - 5 = \pm 4$$

$$x = 5 \pm 4 \quad (3)$$

$$x = 1 \text{ ou } x = 9$$

impossible dans ce problème!

Donc la boîte mesure 9 dm de côtés

(2)

Exercice 7 (environ 3 points)

On considère les conjectures suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Conjecture 1 : Si $a \in \mathbb{R}$, alors $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = a^4$

vrai : $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}} = a^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = a^{\sqrt{2 \cdot 8}} = a^{\sqrt{16}} = a^4$

(1 + 4)

(b) Conjecture 2 : Une équation de degré deux a toujours au moins une solution

faux contre-exemple

$$x^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$$

$$\text{donc } S = \emptyset$$

(1 + 3)