Collège de Saussure Examen semestriel de mathématiques de 1re année, niveau normal	
Date	13 juin 2016
Durée	120 minutes
Maîtres, cours et nombre d'élèves	Jean-Marie Delley 1Ma1.DF02 (22 élèves)
Nombre de pages	5
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	6
Documents et matériel autorisés	personnels : • calculatrice TI-30XS MultiView, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable, TI30X-Pro interdite).
Consignes	• **répondre sur les feuilles d'énoncé** ; si nécessaire, vous pouvez joindre une ou plusieurs des feuilles quadrillées fournies ; • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • tous les calculs et toutes les étapes de vos raisonnements doivent figurer sur votre copie ; le détail des justifications attendues est explicité pour chaque exercice.

Nom : .... **Prénom :** ....

Groupe: .... **Cours :** ....

Points obtenus: .... **Note:** ....

Répartition des points

Exercice 1 : 11 points

Exercice 2 : 8 points

Exercice 3 : 8 points

Exercice 4 : 12 points

Exercice 5 : 22 points

Exercice 6 : 9 points

Notations : 2 points

Total : 72 points

Exercice 1 (environ 11 points)

Factoriser le plus possible chacune des expressions puis réduire les facteurs :

(a) $3\,x^2-30\,x+75$ $= 3(x^2-10x+25)$ /2

$= 3(x-5)^2$

(b) $2\,x^2-162$ $= 2(x^2-81)$ /2

$= 2(x-9)(x+9)$

(c) $7\,a\,b^2\,c^3-28\,a^2\,b^2\,c^2+28\,a^3\,b^2\,c$ $= 7ab^2c(c^2-4ac+4a^2)$

$= 7ab^2c(c-2a)^2$ /2

(d) $x^2-24\,x+63$ $= (x-3)(x-21)$ /2

(e) $(a+b)\cdot(x-y)-(a-b)(y-x)$ $= (a+b)(x-y)+(a-b)(x-y)$

$= (x-y)[(a+b)+(a-b)]$

$= (x-y)[a+\cancel{b}+a-\cancel{b}]$

$= (x-y)\cdot 2a$ /3

Exercice 2 (environ 5 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = 6x^2 - 11x - 35$.

(a) Déterminer l'ensemble Z_f de ses zéros.

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-35) = 961$

$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{961}}{12} = \frac{11 \pm 31}{12}$ $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$; $x_2 = -\frac{20}{12} = -\frac{5}{3}$

$Z_f = \left\{ -\frac{5}{3} ; \frac{7}{2} \right\}$

/3

(b) Donner sa forme factorisée.

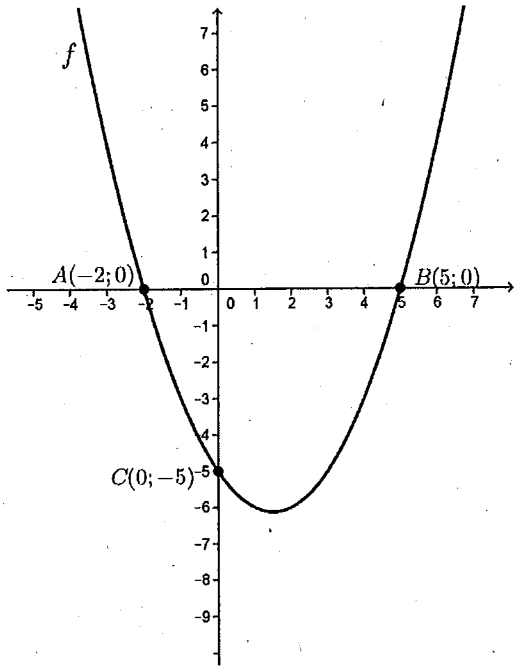
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 6\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right)$

$\left[= 6\left(\frac{2x-7}{2}\right)\left(\frac{3x+5}{3}\right) = (2x-7)(3x+5) \right]$

/2

Exercice 3 (environ 8 points)

On donne ci-dessous des représentations graphiques de deux fonctions f et g de degré 2.
Déterminer l'expression algébrique de chaque fonction. (Une des trois formes - développée, canonique ou factorisée – suffit.)



La courbe représentative de f contient les points A, B et C.

$f(x) = a(x+2)(x-5)$

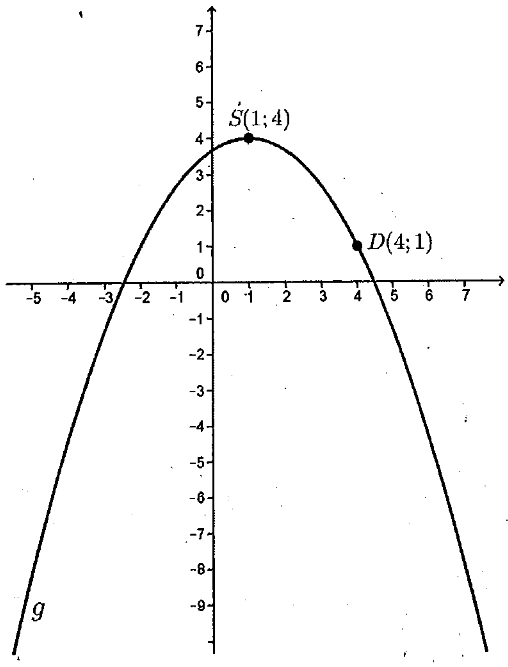
$f(0) = -5 \Leftrightarrow a(0+2)(0-5) = -5$

$\Leftrightarrow -10a = -5$

$\Leftrightarrow a = 1/2$

$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-5)$

/4



Le point S est le sommet de la parabole.
Le point D appartient à la courbe représentative de g.

$g(x) = a(x-1)^2 + 4$

$g(4) = 1 \Leftrightarrow a(4-1)^2 + 4 = 1$

$\Leftrightarrow 9a + 4 = 1$

$\Leftrightarrow 9a = -3$

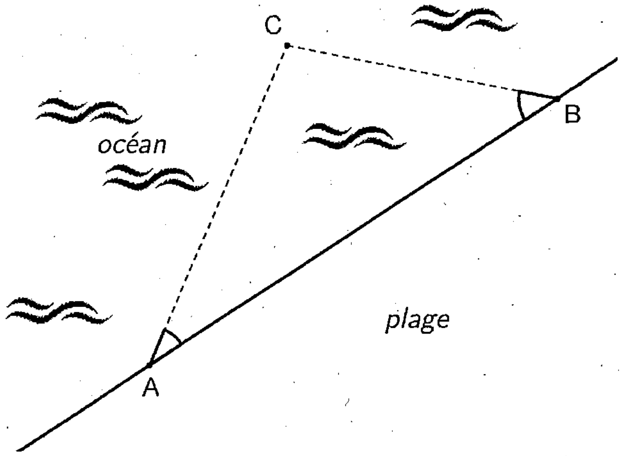
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$

$g(x) = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + 4$

/4

Exercice 4 (environ 11 points)

Au large d'une plage bien rectiligne, se trouve une petite île. Les agents Smith et Wesson doivent déterminer à quelle distance du rivage elle se trouve.
Ils ont effectué le croquis ci-contre :



Smith s'est posté au point A et a mesuré un angle $\widehat{CAB}$ de 30° entre l'île (au point C) et le bord de la plage.

Wesson, après une marche éprouvante de 250 m dans le sable du point A jusqu'au point B, a mesuré, lui, un angle $\widehat{CBA}$ de 60°.

En raison de la forte chaleur, Smith et Wesson vous délèguent les calculs suivants (les calculs détaillés suffisent comme justification) :

(a) Déterminer l'angle $\widehat{ACB}$.

$\angle ACB + 30 + 60 = 180$

$\Leftrightarrow \angle ACB = 180 - 60 - 30$
$= 90$

/1

(b) Déterminer les longueurs de $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ en valeurs exactes et arrondies au centième :

$\sin(30) = \frac{\overline{BC}}{250} \Leftrightarrow \overline{BC} = 250 \cdot \sin(30) = 250 \cdot \frac{1}{2} = 125 \text{ m}$ /2

$\cos(30) = \frac{\overline{AC}}{250} \Leftrightarrow \overline{AC} = 250 \cos(30) = 250 \frac{\sqrt{3}}{2} = 125\sqrt{3} \cong 216,51 \text{ m}$

/2

arrondi /0.5
m : /0.5

(c) En déduire la distance la plus courte entre C et le bord de la plage (val. exacte et arrondie au centième)

$\sin(60) = \frac{d}{\overline{BC}} \Leftrightarrow d = \overline{BC} \sin(60) = 125 \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 108,25 \text{ m}$ /3

arr : /0.5
m : /0,5

Exercice 5 (environ 8 points)

Le propriétaire d'un verger de pommiers a calculé que s'il plante 48 arbres sur son terrain, chaque arbre produit 600 pommes par année.

De plus, il estime que chaque fois qu'il plante un arbre supplémentaire sur son terrain, la production de chaque arbre diminue de 6 pommes.

(a) Montrer que le nombre total de pommes récoltées par année R en fonction du nombre d'arbres supplémentaires x est : $R(x) = -6x^2 + 312x + 28800$

x = nbre arbres suppl.

$$R(x) = \underbrace{(48 + x)}_{\text{nbre total d'arbres}} \cdot \underbrace{(600 - 6x)}_{\text{production par arbre}}$$

$$= 48 \cdot 600 + 600x - 6 \cdot 48x - 6x^2$$

$$= -6x^2 + 312x + 28800$$

/3

(b) Combien faut-il planter d'arbres supplémentaires pour récolter le plus de pommes possible ?

Sommet : $S = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-312}{-12} ; \frac{-[312^2 - 4(-6) \cdot 28800]}{-24}\right)$

$= \left(26 ; \frac{788544}{24}\right) = (26 ; 32856)$

Il faut planter 26 arbres supplémentaires.

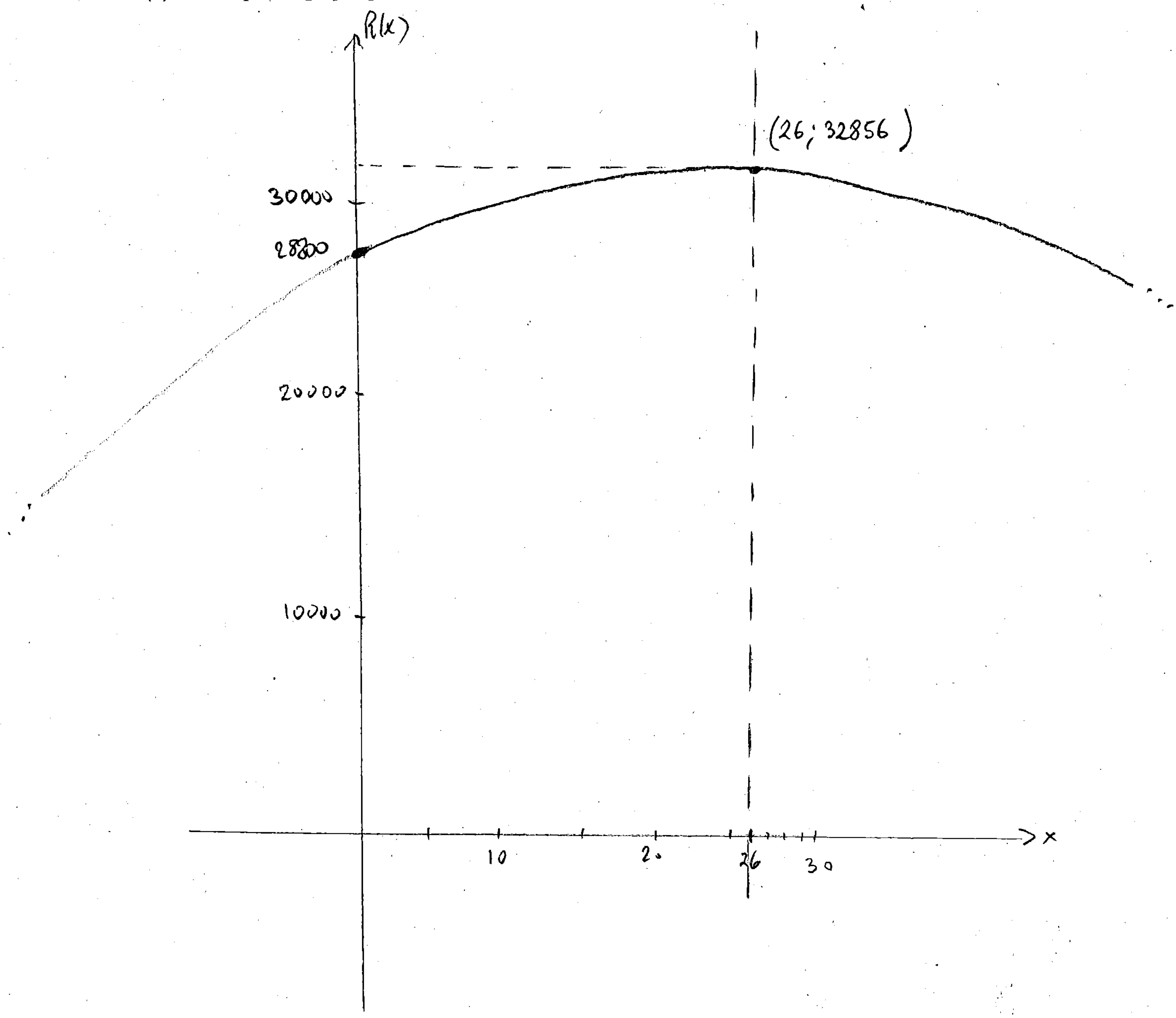
/3

(c) Quel est alors le nombre maximal de pommes récoltées par an ?

Le nombre de pommes maximal est de 32856 pommes

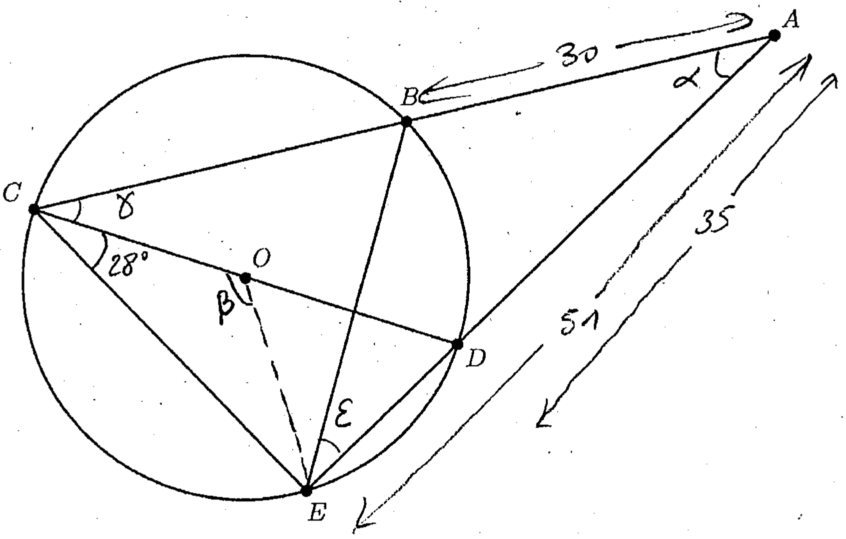
/2

(d) Interpréter graphiquement.



Exercice 5 (environ x points)

On considère le cercle de centre O ci-dessous. Les points C, B, A, les points E, D, A et les points C, O, D sont alignés :



Données : $\overline{AB} = 30$; $\overline{AE} = 51$; $\overline{AD} = 35$; $\widehat{DCE} = 27{,}6°$

Pour toutes les questions suivantes, justifier très précisément !

(a) Démontrer que les triangles ΔABE et ΔADC sont semblables.

$\gamma = \varepsilon$ [par thm "angles inscrits"]
α commun [par hypothèse]
donc le 3e angle est aussi égal : $\angle ABE = \angle CDA$ [par thm "$\Sigma\alpha\Delta = 180$"]

donc $\Delta ABE \sim \Delta ADC$ [par déf Δ semblables]

arg : 2
just : 2

(b) Calculer la longueur $\overline{AC}$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} \quad \text{[par "thm de Thalès"]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{51} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BE}} = \frac{35}{30} \quad \text{[par hypothèse / substitution]}$$

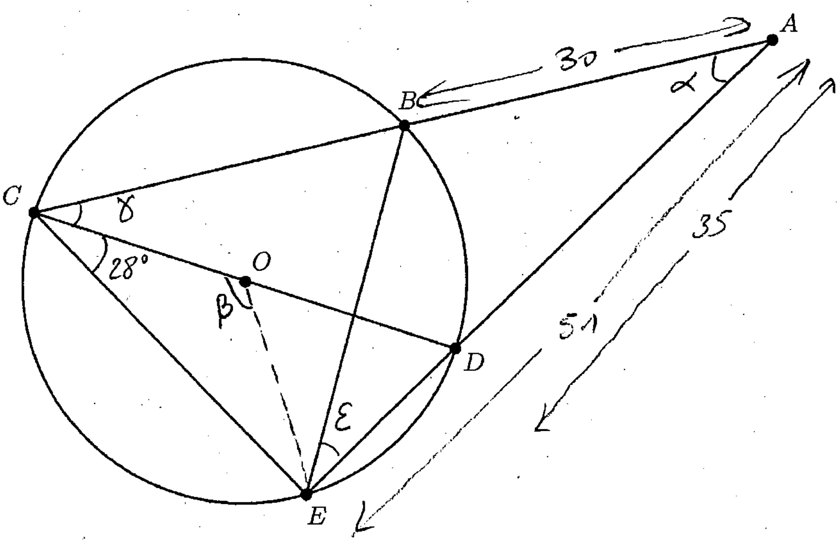
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{51 \cdot 35}{30} \quad [\cdot 51]$$

$$= 59{,}5$$

arg : 1
calc : 2

Exercice [illegible] (environ [illegible]x points)

On considère le cercle de centre O ci-dessous. Les points C,B, A, les points E, D, A et les points C, O, D sont alignés :



Données : $\overline{AB} = 30$; $\overline{AE} = 51$; $\overline{AD} = 35$; $\widehat{DCE} = 27{,}6°$

Pour tous les questions suivantes, justifier très précisément !

(a) Démontrer que les triangles ΔABE et ΔADC sont semblables.

$\gamma = \varepsilon$ [par thm "angles inscrits"]
α commun [par hypothèse]
donc le 3e angle est aussi égal : $\angle ABE = \angle CDA$ [par thm "$\Sigma\alpha\Delta = 180$"]

donc $\Delta ABE \sim \Delta ADC$ [par déf Δ semblables]

arg : 2
just : 2

(b) Calculer la longueur $\overline{AC}$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}}$$ [par "thm de Thalès"]

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{51} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BE}} = \frac{35}{30}$$ [par hypothèse / substitution]

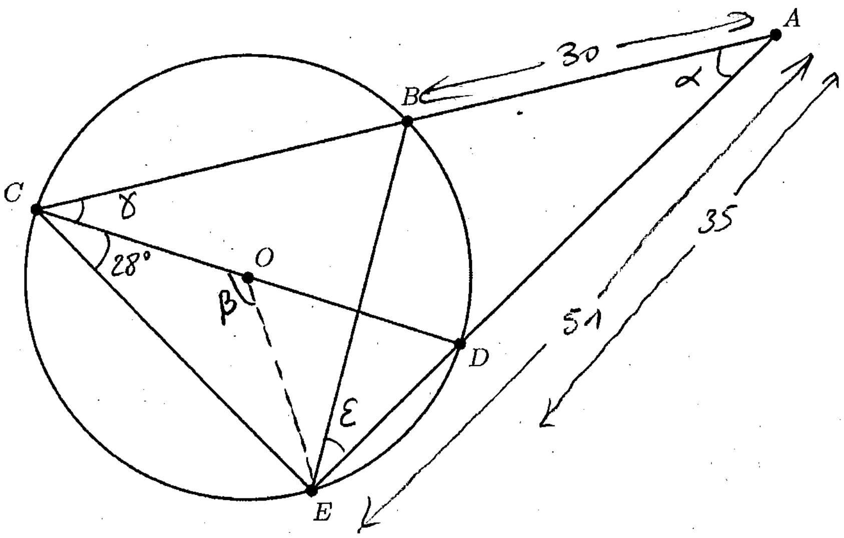
arg : 1
calc : 2

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{51 \cdot 35}{30}$$ [$\cdot$ 51]

$$= 59{,}5$$

Exercice 6 (environ 1x points)

On considère le cercle de centre O ci-dessous. Les points C, B, A, les points E, D, A et les points C, O, D sont alignés :



Données : $\overline{AB} = 30$; $\overline{AE} = 51$; $\overline{AD} = 35$; $\widehat{DCE} = 27{,}6°$

Pour tous les questions suivantes, justifier très précisément !

(a) Démontrer que les triangles ΔABE et ΔADC sont semblables.

$\gamma = \varepsilon$ [par thm "angles inscrits"]
α commun [par hypothèse]
donc le 3e angle est aussi égal : $\angle ABE = \angle CDA$ [par thm "$\Sigma \measuredangle \Delta = 180$"]

donc $\Delta ABE \sim \Delta ADC$ [par déf Δ semblables]

arg : 2
just : 2

(b) Calculer la longueur $\overline{AC}$.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}}$$ [par "thm de Thalès"]

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{51} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BE}} = \frac{35}{30}$$ [par hypothèse / substitution]

arg : 1
calc : 2

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{51 \cdot 35}{30}$$ [$\cdot$ 51]

$$= 59{,}5$$