Travail de mathématiques n°2

Date : 23 novembre 2015 Durée : 90' Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 1Ma1DF02 Matériel autorisé o Calculatrice personnelle non programmable et non graphique Remarques o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs. o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »! o Indiquez vos initiales en haut de chaque page	**Nom**: .... **Prénom**: .... **Groupe**: .... Notations (une coche par faute) : Fautes : → .... / 2 Français (une coche par faute) [bonus] : Fautes : → .... / 2 Total des points des exercices : .... / 86 Total des points de l'épreuve : .... / 88 Note : / 6

Début du travail

Exercice 1 *(environ 17 points)*

(a) Compléter par le symbole adéquat:

i. $\mathbb{Z}$ ..$\subseteq$.. $\mathbb{Q}$

ii. $-\sqrt{8}$ ..$\in$.. $\mathbb{R}$

iii. $3,\overline{9}$ ..$\in$.. $\mathbb{Q}$

iv. $3,\overline{9}$ ..$=$.. 4

v. $\frac{0}{12}$ ..$\in$.. $\mathbb{R}$

vi. $-\sqrt{-4}$ ..$\notin$.. $\mathbb{R}$

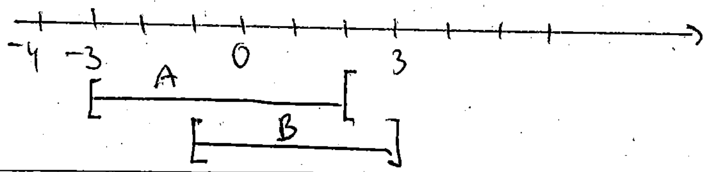
/6

(b) Compléter le tableau suivant:

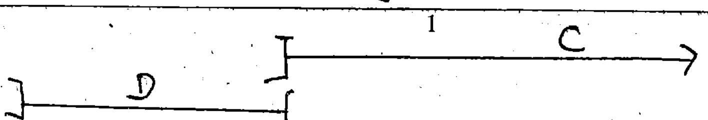
A	$\{x\in\mathbb{R} \mid -3\leq x<2\}$	$[-3;2[$
B	$\{x\in\mathbb{R} \mid -1\leq x\leq 3\}$	$[-1;3]$
C	$\{x\in\mathbb{R} \mid 1<x\}$	$]1;+\infty[$
D	$\{x\in\mathbb{R} \mid -4<x<1\}$	$]-4;1[$

/4

(c) Représenter A, B, C et D sur une droite réelle.



/2



(d) Déterminer avec la notation adéquate:

i. $A \cup B$ = [-3; 3] /1

ii. $C \cap D$ = ∅ /1

iii. $A \setminus B$ = [-3; -1[/2

iv. $B \cap D$ = [-1; 1[/1

Exercice 2 *(environ 7 points)*

Donner la définition mathématique de :

(a) variable

c'est une lettre ou un symbole qui représente n'importe quel nombre /2

(b) hypothèse

C'est la 1ère partie d'une implication qui fixe les conditions pour que le résultat énoncé dans la conclusion soit vrai /2

(c) fonction

une fonction d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F est une relation qui à chaque élément de F associe au plus un élément de F /3

Exercice 3 *(environ 17 points)*

On considère les conjectures suivantes.

- les écrire sous la forme d'une implication,
- puis déterminer si elles sont vraies ou fausses,
- en justifiant précisément.

(a) Conjecture 1: $8n+1$ se termine toujours par 1 pour n un entier naturel

Faux /1

Contre-exemple : $n=1 \Rightarrow 8\cdot1+1=9$ ne se termine pas par 1. /2

Implication : Si $n \in \mathbb{N}$, alors $8n+1$ se termine par 1 /1

(a) Conjecture 2: La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3

Vrai /1

Démonstration. n, $n+1$ et $n+2$ sont 3 entiers consécutifs [déf "consécutif"]

leur somme est : $n+(n+1)+(n+2)$ [déf "somme"]

$= 3n+3$ [réduite]

$= 3(\underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}})$ [mise en évidence]

est un multiple de 3 [déf de "mult de 3"]

/6

Implication : Si on considère 3 entiers consécutifs, alors leur somme est un multiple de 3 /1

(b) Conjecture 3: n^2+n+11 est premier pour n un nombre entier naturel

Implication: Si $n \in \mathbb{N}$, alors n^2+n+11 est premier /1

Faux /1

Contre-exemple : $n = 11 \Rightarrow 11^2+11+11 = 11[11+1+1]$
$= 11 \cdot 13$
n'est pas premier /3

Exercice 4 (environ 4 points)

Donner un exemple de conjecture qui soit vraie mais dont la réciproque soit fausse~~, en donnant les justifications nécessaires.~~

"Si n est multiple de 4, alors n est pair" est vraie /2

La réciproque : "Si n est pair, alors n est multiple de 4" est fausse

/2

Exercice 5 *(environ 20 points)*

On considère la conjecture suivante:

HYP CONCL

Si $\boxed{n \text{ est tel que } n \text{ est impair}}$, alors $\boxed{n^2 \text{ est impair.}}$

(a) Identifier clairement hypothèse(s) et conclusion(s)
(vous pouvez directement les entourer et les identifier ci-dessus) /2

(b) Donner une hypothèse implicite contenue dans cette conjecture.

n est un entier /1

(c) Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

n impair [par hypothèse]

$\Rightarrow n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ [par déf de "impair"]

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$ [par déf de "carré de"]

$= 4k^2 + 4k + 1$ [id remarquable]

$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$ [mise en évidence]

est impair [par déf de "impair"]

/6

(d) Enoncer sa réciproque.

Si n^2 est impair, alors n est impair

/2

(e) Cette réciproque est-elle vraie ou fausse? Justifier.

Vrai, on démontre la contraposée :

Si n pas impair, alors n^2 pas impair

$\Leftrightarrow$ Si n pair, alors n^2 pair

/3

dém: n pair [par hypothèse]

$\Rightarrow n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ [par déf de "pair"]

$\Rightarrow n^2 = (2k)^2$ [par déf de "carré"]

$= 4k^2$ [propr. puissances]

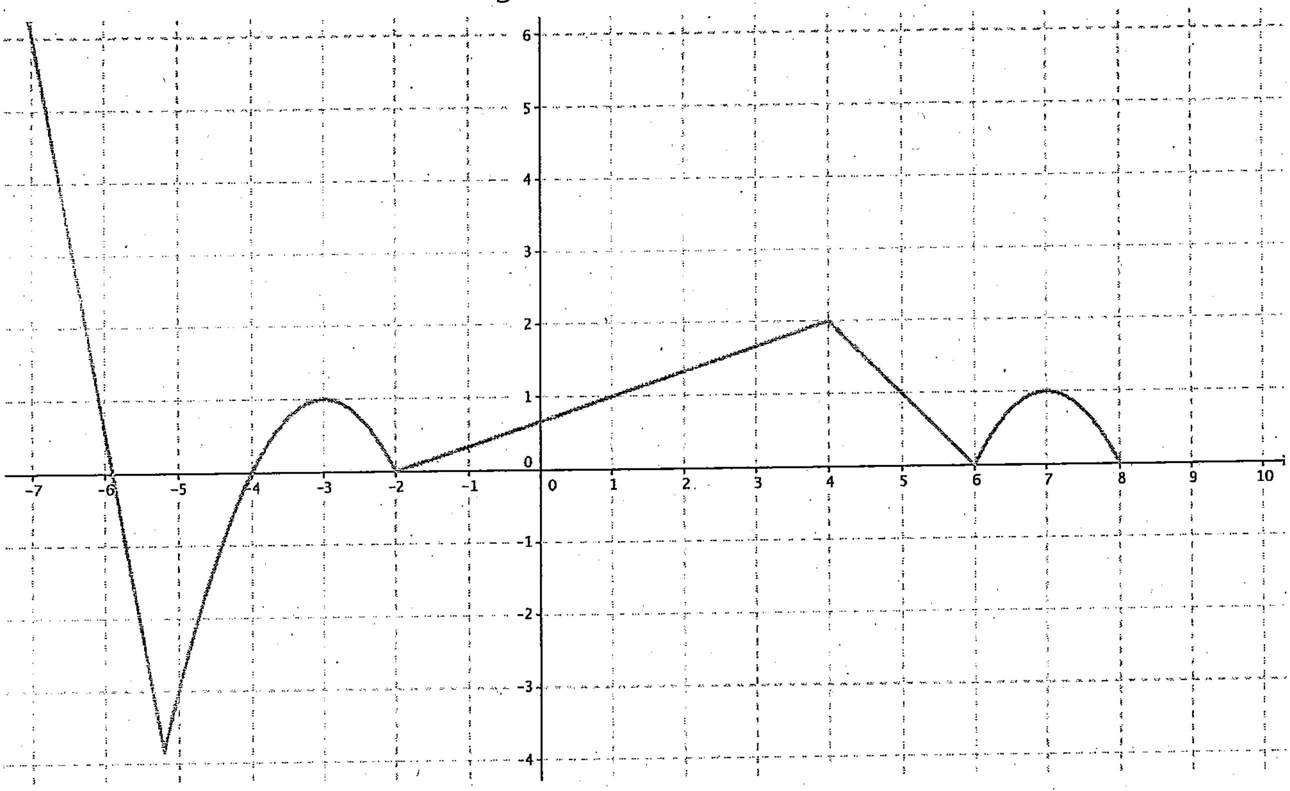
$= 2(\underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}})$ [décomposition]

$\Rightarrow n^2$ pair [par déf de "pair"]

/6

Exercice 6 *(environ 20 points)*

On considère la fonction f ci-dessous, donnée par sa courbe représentative, ainsi que les points A(-5;-3), B(-2;0) et C(2 ; $\frac{4}{3}$).



(a) Calculer le point milieu de [BC] $M = \left(\frac{-2+2}{2} ; \frac{0+4/3}{2}\right) = \left(0 ; \frac{2}{3}\right)$ /2

(b) Calculer la distance entre A et C. $d = \sqrt{[2-(-5)]^2 + \left[\frac{4}{3}-(-3)\right]^2} = \sqrt{7^2 + \left(\frac{13}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{49 + \frac{169}{9}} = \sqrt{\frac{610}{9}} \cong 8,23$ /3

(c) Déterminer graphiquement et répondre en utilisant des notations correctes :

i. L'image de -3 est 1.......... /0,5

ii. $f(3,5)$ $\cong 1,8$ /0,5

iii. $f(9)$ $\nexists$ /1

iv. Une préimage de -3 est ....-5....... /1

v. $f^{-1}(1)$ $\cong \{-6,1 ; -3 ; 1 ; 5 ; 7\}$ /2

vi. $f^{-1}(-4,5) = \emptyset$ /1

vii. L'ordonnée à l'origine de f est environ 0,6 /1 *viii.* $Z_f \cong \{-5{,}8 ; -4 ; -2 ; 6 ; 8\}$ /2

ix.le tableau de signes de f est :

x		$-5{,}8$		-4		-2		6		8
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0

/2

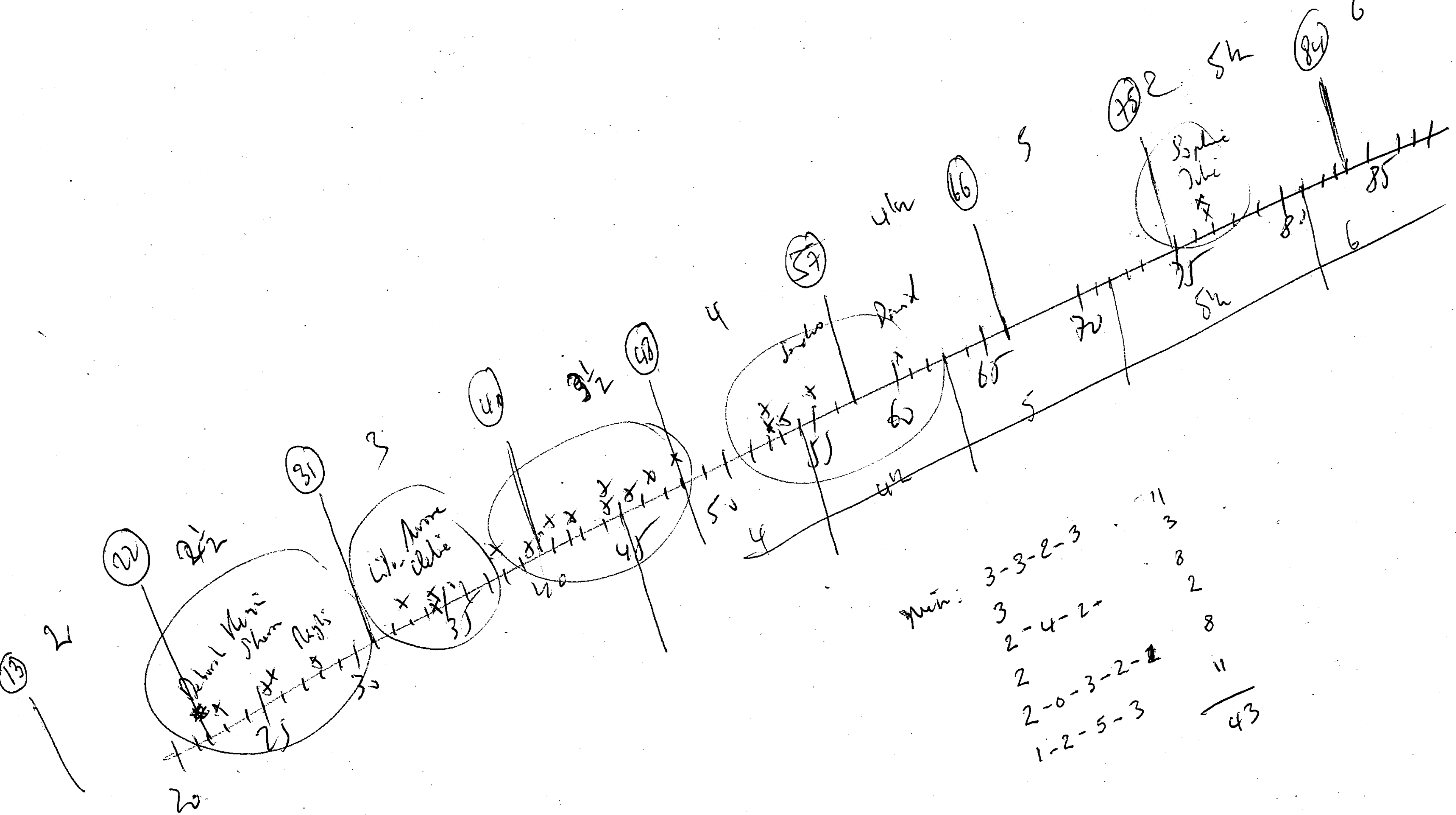
x. le(s) x tels que $f(x)$=est négative ou nulle :

$[-5{,}8 ; -4] \cup \{-2 ; 6 ; 8\}$ /2

xi.le(s) x tels que $f(x)$=est strictement positive :

$I \cong]-\infty ; -5{,}8[\cup]-4 ; -2[\cup]-2 ; 6[\cup]6 ; 8[$

/2



Marin: 3-3-2-3	11
3	3
2-4-2	8
2	2
2-0-3-2-1	8
1-2-5-3	11
	43