<table>
<tr><th colspan="2">Travail de mathématiques n°1</th></tr>
<tr><td>Date : 28 septembre 2015
Durée : 90'
Enseignant : Jean-Marie Delley
Cours : 1Ma1DF02
Matériel autorisé
o Calculatrice personnelle non programmable et non graphique
Remarques
o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
o Indiquez vos initiales en haut de chaque page</td><td>Nom: ....
Prénom: ....
Groupe: ....
Notations (une coche par faute) :
Fautes : → .... / 2
Français (une coche par faute) [bonus] :
Fautes : → .... / 2
Total des points des exercices : .... /..66..
Total des points de l'épreuve : .... / ..68..
Note : / 6</td></tr>
</table>

Début du travail

Exercice 1 (environ 14 points)

(a) Simplifier le plus possible :

$-3-(-3-(-3-(-4)))= -3-(-3-(-3+4))$

$= -3-(-3-1)$

$= -3-(-4)$

$= -3+4 = 1$

/2

(b) Calculer $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 \overset{\text{"C"}}{=} 512$.

/2

(c) Donner le reste et le quotient de la division euclidienne de 2984364 par 47513 :

$$\begin{array}{r|l} 2984364 & 47513 \\ -\ 2945806 & 62 \\ \hline 38558 & \end{array}$$

d'où $2984364 = \underbrace{62}_{\text{quotient}} \cdot 47513 + \underbrace{38558}_{\text{reste}}$

/3

(d) Le cours du dollar est de 1,0197 chf pour 1$. Combien faut-il de francs suisses pour acheter 6000$?

$$\frac{1\,\$}{1{,}0197\text{ chf}} = \frac{6000\,\$}{x\text{ chf}} \Leftrightarrow x = 6000 \cdot 1{,}0197 = 6118{,}2\text{ chf}$$

/2

(e) directement avec la calculatrice :

i. calculer en donnant un résultat arrondi au millième :

$$\frac{-9807518-(-24)^3-12547}{3\cdot(-1254784-44587)} \simeq 2{,}516$$

/2

ii. écrire comme fraction irréductible la fraction suivante, à la main, en décomposant en facteurs premiers :

$$\frac{884}{2548} = \frac{\cancel{2^2}\cdot\cancel{13}\cdot 17}{\cancel{2^2}\cdot 7^2\cdot\cancel{13}} = \frac{17}{49}$$

/2

iii. vérifier le calcul précédent avec la calculatrice et indiquer ici la séquence de touches utilisées :

$8 \to 8 \to 4 \to \frac{n}{d} \to 2 \to 5 \to 4 \to 8 \to$ enter

/1

Exercice 2 (environ 3[illegible] points)

(a) Calculer en donnant le résultat sous forme irréductible (rappel : on doit voir le détail des calculs) :

i. $$\frac{-(-2)^3}{-(-2)\cdot(-1)^2} = \frac{+8}{2\cdot 1} = 4$$

/2

ii. $$\frac{7}{210}+\frac{4}{66} = \frac{\cancel{7}^{1}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot\cancel{7}} + \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 11} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 11} = \frac{11 + 2\cdot 2\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}$$

$$= \frac{11+20}{330} = \frac{31}{330}$$

/2

iii. $$\frac{\cancel{49}^{7}}{\cancel{64}_{2}}\cdot\frac{\cancel{32}^{1}}{\cancel{25}_{1}}\cdot\frac{\cancel{125}^{5}}{\cancel{7}_{1}} = \frac{7\cdot 5}{2} = \frac{35}{2}$$

/2

iv. $\frac{\frac{14^{5}\cdot 15^{3}}{66}}{21^{6}\cdot 3^{2}} = \dfrac{\left(\dfrac{(2\cdot 7)^{25}}{11}\right)^{10}}{2^{249}(7^2)^{125}\cdot 11^{11}} = \dfrac{\left(\dfrac{2^{25}\cdot 7^{25}}{11}\right)^{10}}{\dfrac{2^{249}\cdot 7^{250}}{11^{11}}} = \dfrac{\dfrac{2^{250}\cdot 7^{250}}{11^{10}}}{\dfrac{2^{249}\cdot 7^{250}}{11^{11}}}$

$= \dfrac{\cancel{2^{250}}^{\,2}\cdot \cancel{7^{250}}}{\cancel{11^{10}}} : \dfrac{\cancel{11^{11}}^{\,11}}{\cancel{2^{249}}\cdot \cancel{7^{250}}} = 2\cdot 11 = 22 \left(=\frac{22}{1}\right)$ /5

(b) Ecrire $\frac{18}{7}$ sous forme de nombre décimal :

$$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ -14 & 2,571428\ldots \\ 40 & \\ -35 & \\ 50 & \\ -49 & \\ 10 & \\ -7 & \\ 30 & \\ -28 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20 \\ -14 \\ 60 \\ 56 \\ 40 \\ \ldots \end{array}$$

donc $\frac{18}{7} = 2,\overline{571428}$

/4

(c) Ecrire sous forme de fraction irréductible : $x = 56,84\overline{2}$

$\left.\begin{array}{l} 100x = 5684,\overline{2} \\ 1000x = 56842,\overline{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 1000x \\ -\ 100x \\ \hline 900x \end{array} = \begin{array}{r} 56842,\overline{2} \\ 5684,\overline{2} \\ \hline 51158 \end{array}$

d'où $x = \frac{51158}{900} \overset{\text{"C"}}{=} \frac{25579}{450}$ /4

(d) Ecrire comme puissance de 10 : « Cent mille milliards de mille millions » : /1

$10^2\cdot 10^3\cdot 10^9\cdot 10^3\cdot 10^6 = 10^{23}$

(e) Transformer en écriture scientifique : 0,0000000008978= $8,978\cdot 10^{-8}$ /1

(f) Simplifier au maximum

i. $(\sqrt{18})^3 = \left(\sqrt{9\cdot 2}\right)^3 = \left(\sqrt{9}\sqrt{2}\right)^3 = \left(3\sqrt{2}\right)^3 = 3^3\left(\sqrt{2}\right)^3 = 27\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{2}$
$= 27\cdot 2\cdot\sqrt{2}$
$= 54\sqrt{2}$ /3

ii. Simplifier au maximum $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{640}} = \sqrt{\frac{1000}{640}}$

$\overset{\text{"C"}}{=} \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$ /2

(g) Transformer pour obtenir une expression sans racine au « dénominateur » ~~puis~~ et simplifier au maximum :

i. $\frac{-5}{\sqrt{50}} = \frac{-5}{\sqrt{25\cdot 2}} = \frac{-\cancel{5}^{1}}{\cancel{5}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ /2

ii. $\frac{-1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} \cdot \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6}-\sqrt{7})} = \frac{-(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{6-7} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{1}$

$= \sqrt{6}-\sqrt{7}$ /3

Exercice 3 (environ 9 points)

(a) Réduire le plus possible :

$-(-5x-4y-(x-y))-5y-(3x-(2y-3x)+(-x+y)-2y)+3x$

$= -(-5x-4y-x+y)-5y-(3x-2y+3x-x+y-2y)+3x$

$= -(-6x-3y)-5y-(5x-3y)+3x$

$= +6x+3y-5y-5x+3y+3x$

$= 4x+y$ /4

(b) Simplifier le plus possible et de sorte qu'il n'y ait aucun exposant négatif dans la réponse($a, b \in \mathbb{R}^*$) :

$\frac{(b^4)^{-3}\cdot(a^{-4}\cdot b^{-2})^{-5}}{(b^3\cdot b^2)^{-1}\cdot(b^5)^3}\cdot a^8 = \frac{b^{-12}\cdot a^{20}b^{10}a^8}{(b^5)^{-1}\cdot b^{15}}$

$= \frac{b^{-2}a^{28}}{b^{-5}b^{15}} = \frac{b^{-2}a^{28}}{b^{10}} = \frac{a^{28}}{b^{12}}$ /5

Exercice 4 (environ 5 points)

Compléter par le bon terme :

(a) -4589 est un entier ...relatif........... /1

(b) -458,9 est un nombre...rationnel... /1

(c) l'opposé de -34 est 34 /1

(d) Le ..produit.... de deux entiers est le résultat de leur multiplication. /1

(e) Dans 10^5, 10 s'appelle ..la base....... et 5 est ..l'exposant.. /1

Exercice 5 (environ 7 points)

(a) Donner la définition de la racine carrée d'un nombre réel x positif ou nul :

la racine carrée de a est le nombre positif b tel que $b^2 = a$

/3

(b) Compléter les [.................] ci-dessous :
Soit a et b deux nombres réels ~~.......~~ et n un entier naturel non nul, alors on a :
$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Démonstration :

$(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n \text{ fois}}$, car [.....déf de x^n avec n entier naturel $\neq 0$] /2

$= \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ fois}} \cdot [\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n \text{ fois}}]$ /2

$= (a^n)\cdot[\ldots b^n \ldots]$, car [............idem............]

(c) Facultatif (max environ + 4 points): proposer une démonstration pour le cas ou n est un entier relatif négatif non nul.

$n \in \mathbb{Z}^*_-$; on pose $m = -n$, donc $m \in \mathbb{N}^*$

$(ab)^n = (ab)^{-m}$ [par déf de m]

$= \dfrac{1}{(ab)^m}$ [par déf de a^k avec $k \in \mathbb{Z}^*_-$]

$= \dfrac{1}{a^m b^m}$ [par thm démontré en b)]

$= a^{-m} b^{-m}$ [par déf de a^k avec $k \in \mathbb{Z}^*_-$]

$= a^n b^n$ [par déf de m]

Exercice 6 (facultatif : max environ + 10 points)

(a) Démontrer que $1+2+2^2+2^3+2^4+,,,+2^n=2^{n+1}-1$

$(1+2+2^2+\dots+2^{n-1}+2^n)$

$=(1+2+2^2+\dots+2^{n-1}+2^n)(2-1)$

$=(2-1)+(\cancel{2^2}-\cancel{2})+(\cancel{2^3}-\cancel{2^2})+(2^4-\cancel{2^3})+\dots+(\cancel{2^n}-\cancel{2^{n-1}})+(2^{n+1}-\cancel{2^n})$

$=2^{n+1}-1$

(b) En admettant que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, démontrer que $5\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (

Supposons que $5\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

on aurait $5\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ $(p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{Z}^*)$

càd $\sqrt{2}=\frac{\frac{p}{q}}{5}=\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{5}=\frac{p}{5q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$, $5q\in\mathbb{Z}^*$

donc $\sqrt{2}$ serait rationnel, ce qui est absurde

Donc $5\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.