Collège de Saussure

Examen semestriel de mathématiques de 1re année, niveau normal

Date	20 décembre 2016
Durée	120 minutes
Maîtres, cours et nombre d'élèves	Jean-Marie Delley 1Ma1.DF03 (23 élèves)
Nombre de pages	10
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	7
Documents et matériel autorisés	personnels : • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• **répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire les feuilles quadrillées fournies en y ajoutant votre nom ;** • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul ; • tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.

Nom : ....**Prénom :** ....

Groupe: ....**Cours :** ....

Points obtenus: ....**Note:** ....

Répartition des points

Exercice 1 : 9 points

Exercice 2 : 5 points

Exercice 3 : 13 points

Exercice 4 : 14 points

Exercice 5 : 7 points

Exercice 6: 7 points

Exercice 7: 13 points

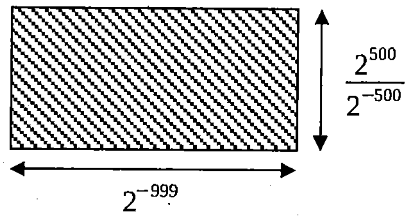
Notations : 2 points

Total : 70 points

Exercice 1 (environ 9 points)

Calculer en valeur exacte et sous forme réduite l'aire de chacun des rectangles suivants :

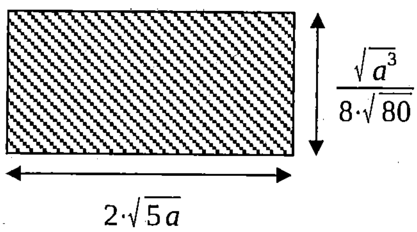
(a)



$$A = 2^{-999} \cdot \frac{2^{500}}{2^{-500}} = \frac{1}{2^{999}} \cdot 2^{500+500} = \frac{2^{1000}}{2^{999}} = 2^{1000-999} = 2^1 = 2$$

/3

(b)

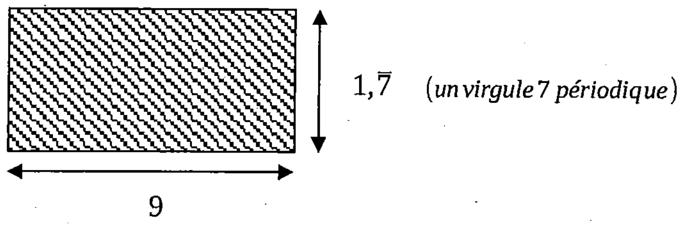


$$A = 2\sqrt{5a} \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{8\sqrt{80}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}}{8\cdot\sqrt{16\cdot 5}} = \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{a\cdot a^3}}{{}_4\cancel{8}\cdot 4\cancel{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^4}}{16} = \frac{a^2}{16}$$

/3

(c) *Ici, on demande d'effectuer toutes les transformations nécessaires sans utiliser la calculatrice.*



$x = 1,\overline{7}$

$10x = 17,\overline{7}$ d'où $\begin{array}{r} 10x \\ -\ x \\ \hline 9x \end{array} = \begin{array}{r} 17,\overline{7} \\ -\ 1,\overline{7} \\ \hline 16 \end{array}$ c.à.d. $x = \frac{16}{9}$ donc : $A = \frac{16}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} = 16$

/3

Exercice 2 *(5 points)*

Vrai ou faux ? Justifier.

(a) $0,\overline{12} \cdot \sqrt{8} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ est rationnel.

$x = 0,\overline{12}$

$100x = 12,\overline{12}$ d'où $\begin{array}{r} 100x \\ -\ x \\ \hline 99x \end{array} = \begin{array}{r} 12,\overline{12} \\ 0,\overline{12} \\ \hline 12 \end{array}$ c.à.d. $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ donc

$0,\overline{12} \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{33} \cdot \sqrt{4 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{4}{33} \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{4}{33} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3}$

$= \frac{16}{99}$ est rationnel

c.à.d. vrai

/3

(b) Si $a, b > 0$, alors $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

Faux ; contre-exemple : $a = b = 1$;

$\sqrt{1} + \sqrt{1} \overset{?}{=} \sqrt{1+1}$

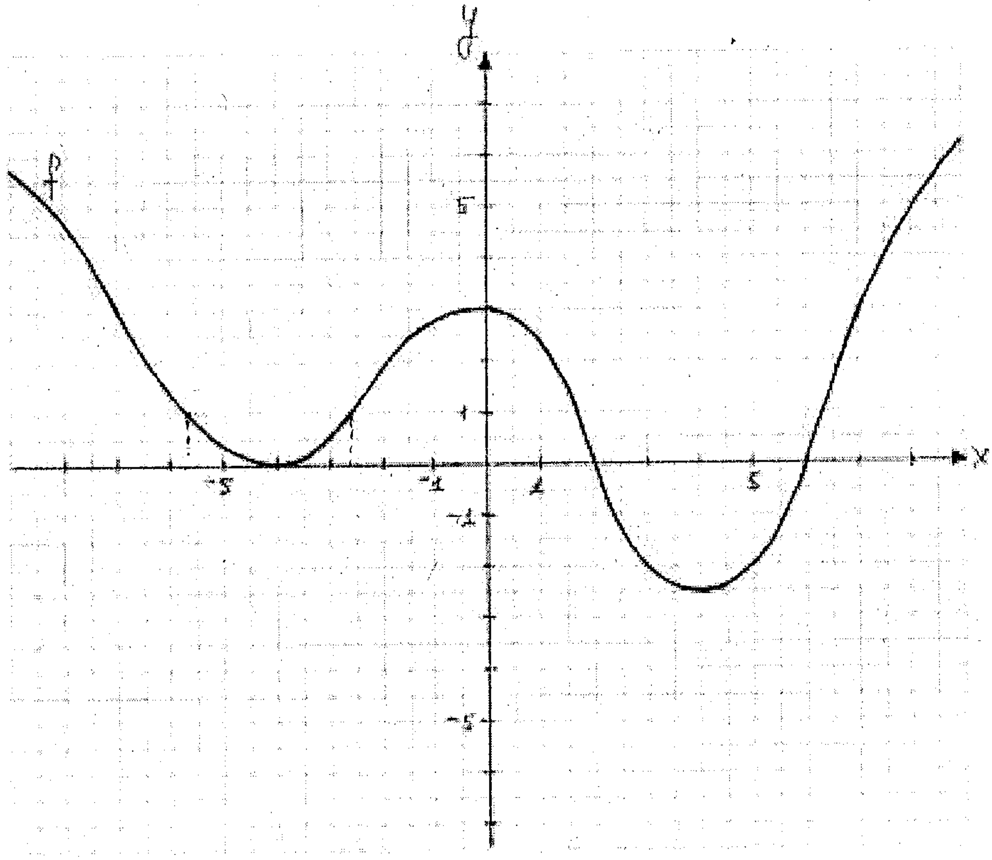
$\Leftrightarrow 1 + 1 \overset{?}{=} \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2 \overset{?}{=} \sqrt{2}$ non

/2

Exercice 3 (environ 13 points)

Soit la fonction réelle f donnée par sa représentation graphique. On suppose qu'il n'y a pas d'autres zéros que ceux visibles sur cette représentation.



Déterminer :

(a) l'ensemble des zéros de f $= \{-4; 2; 6\}$ /2

(b) l'ordonnée à l'origine de f $= 3$ /1

(c) $f(1) = 2,5$ /1

(d) l'image de -3 $= +0,5$ /1

(e) l'ensemble des préimages de 3 $= \{-7; 0; 7\}$ /1,5

(f) $f^{-1}(1) \cong \{-5,7; -2,5; 1,7; 6,3\}$ /1,5

(g) le tableau des signes de f

x		-4		2		6	
$f(x)$	+	0	+	0	−	0	+

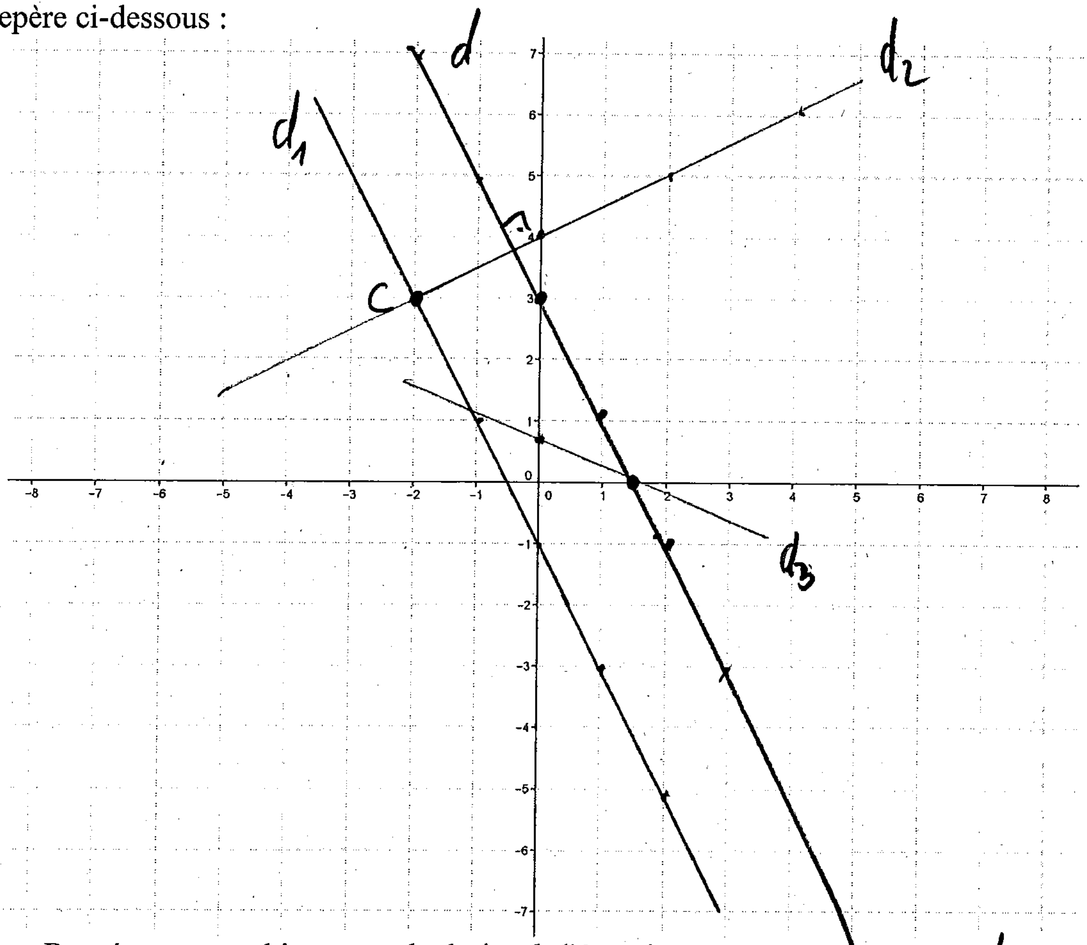
/3

(h) l'ensemble des x pour lesquels $f(x) \geq 0$

$]-\infty; 2] \cup [6; +\infty[$ /2

Exercice 4 (14 points)

Sur le repère ci-dessous :



(a) Représenter graphiquement la droite d d'équation $y = -2x + 3$. /2

(b) Représenter graphiquement la droite d_1 parallèle à d qui contient le point $C(-2; 3)$, puis déterminer son équation.

$d_2 : y = ax + b$

$y = -2x + b$, car $d_2 \parallel d$

$(-2;3) \in d_2 \Leftrightarrow 3 = (-2)\cdot(-2) + b$

$\Leftrightarrow 3 = 4 + b$

$\Leftrightarrow b = -1$

$[d_2 : y = -2x + 1]$ /3

(c) Représenter graphiquement la droite d_2, perpendiculaire à d qui contient C, puis déterminer son équation.

$d_2 : y = ax + b$

$y = \frac{1}{2}x + b$, car $d_2 \perp d$

$(-2;3) \in d_2 \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2}(-2) + b$

$\Leftrightarrow 3 = -1 + b$

$\Leftrightarrow b = 4$ $\quad \left[d_2 : y = \frac{1}{2}x + 4\right]$ /3

(d) Déterminer le point d'intersection I des droites d et d_2.

$d : \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$ d_2

$-2x + 3 = \frac{1}{2}x + 4 \quad \big) -1, -\frac{1}{2}x$

$\Leftrightarrow -2x - \frac{1}{2}x = 4 - 3$

$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}x = 1 \quad \big) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

dans d : $y = -2\left(-\frac{2}{5}\right) + 3 = \frac{4}{5} + 3 = \frac{4+15}{5} = \frac{19}{5}$, donc $I = \left(-\frac{2}{5}; \frac{19}{5}\right)$ /4

(e) Calculer l'ordonnée à l'origine d'une droite d_3 de pente $m = -\frac{1}{2}$ telle que l'intersection de d et d_3 appartienne à l'axe Ox.

on cherche le zéro de d : $-2x + 3 = 0 \quad \big) -3$

$\Leftrightarrow -2x = -3 \quad \big) \div (-2)$

$\Leftrightarrow x = 3/2$

donc $A = \left(\frac{3}{2}; 0\right) \in d_3$

$d_3 : y = -\frac{1}{2}x + b$

$\left(\frac{3}{2}; 0\right) \in d_3 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + b$

$\Leftrightarrow 0 = -\frac{3}{4} + b \quad \big) + \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$ $\quad d_3 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ /2

Exercice 5 (7 points)

(a) Compléter par un symbole adéquat, et donner une justification :

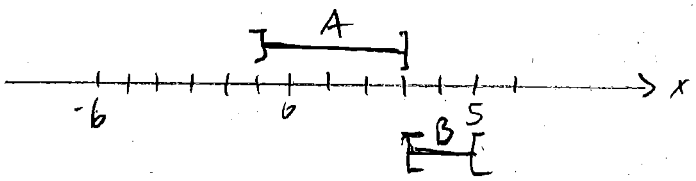
i. $1{,}27 \in \mathbb{Q}$ un nombre rationnel est un nombre dont l'écriture décimale est finie ou infinie périodique, ce qui est le cas de 1,27

/2

ii. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ tout nombre entier relatif a part également un nombre rationnel, car il peut s'écrire a,0 donc $\mathbb{Z} \subseteq$

/2

(b) Représenter les intervalles A=]-1 ; 3] et B= [3 ; 5 [sur une même droite réelle, puis déterminer $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$.



$A \cap B = \{3\}$

$A \cup B =]-1;5[$

$A \setminus B =]-1;3[$

/3

Exercice 6 *(7 points)*

(a) Peut-on trouver trois entiers impairs consécutifs dont la somme vaut 66 ? Justifier.

$2n+1$, $2n+3$ et $2n+5$ sont 3 impairs consécutifs

$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)$ est leur somme

$= 6n+9$

On veut donc : $6n+9 = 66$

$\Leftrightarrow 3(2n+3) = 66 \quad \downarrow \div 3$

$\Leftrightarrow 2n+3 = 22 \quad \downarrow -3$

$\Leftrightarrow 2n = 19$

impossible pour n entier !

/4

(b) Peut-on trouver cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 405 ? Justifier.

$(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+(2n+7)+(2n+9) = 10n+25$

On veut : $10n+25 = 405 \quad \downarrow -25$

$\Leftrightarrow 10n = 380 \quad \downarrow \div 10$

$\Leftrightarrow n = 38$

Les nombres sont :

$2\cdot 38+1 = 77$

$2\cdot 38+3 = 79$

$2\cdot 38+5 = 81$

$2\cdot 38+7 = 83$

$2\cdot 38+9 = 85$

/3

Vérif : $77+\dots+85 = 405$

Exercice 7 *(13 points)*

Partie 1 : On considère la conjecture suivante :

Conjecture 1 : Un multiple de 10 est également multiple de 30.

(a) Ecrire la conjecture 1 sous la forme d'une implication.

Si n est multiple de 10, alors n est multiple de 30 — /1

(b) Cette conjecture 1 est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Fausse : contre-exemple : 10 est multiple de 10
mais pas de 30 — /2

(c) Enoncer la réciproque de la conjecture 1.

Si n est multiple de 30, alors n est multiple de 10 — /1

(d) Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Vraie : n est multiple de 30 [hyp]
$\Rightarrow n = 30k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ [déf "mult"]
$= 10 \cdot \underbrace{(3k)}_{\in \mathbb{Z}}$ [décomposition]
est donc multiple de 10 [déf "mult"] — /3

(e) Enoncer la contraposée de la conjecture 1.

Si n n'est pas multiple de 30, alors n n'est pas multiple de 10 — /1

Partie 2 : On considère la conjecture suivante :

Conjecture 2 : La différence des carrés de deux entiers quelconques consécutifs est impaire.

(f) Parmi les choix ci-dessous, quelle est l'implication correspondant à la conjecture 2 (entourer la bonne réponse) ?

i. Si x et y sont consécutifs, alors x^2 et y^2 sont impairs.

ii. Si $y-x$ est impair, alors y^2 et x^2 sont consécutifs.

iii. Si x et y sont consécutifs, alors y^2-x^2 est impair.

iv. Si x et y sont consécutifs, alors $(y-x)^2$ est impair.

v. Si y^2-x^2 est impair, alors x et y sont consécutifs.

vi. Si x et y sont consécutifs, alors $\frac{y^2}{x^2}$ est impair.

/1

(g) Démontrer que la conjecture 2 est vraie.

dém : x et y consécutifs [hyp]

donc $y = x+1$ [déf "consécutifs"]

donc leur différence de leurs carrés est :

$(x+1)^2 - x^2$ [déf "différence" et "carré"]

$= x^2+2x+1-x^2$ [id rem]

$= 2x+1$ [réduire]

est impair [déf impair]

4