

Travail de mathématiques n°1

Date : 5 octobre 2016

Durée : 90'

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 1Ma1DF02

Matériel autorisé

- Calculatrice personnelle non programmable et non graphique

Remarques

- Répondre directement sur l'énoncé.
- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Nom:

Prénom:

Groupe:

Notations (une coche par faute) :

Fautes :

→ / 1

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :

→ / 1

Total des points des exercices : / ~~60~~Total des points de l'épreuve : / ~~68~~

Note :

/ 6

Début du travail*Exercice 1*

Compléter par le bon terme :

- (a) L'ensemble des entiers positifs ou négatifs s'appelle l'ensemble des nombres relatifs.....
- (b) Dans l'expression 8^{23} , 8 s'appelle la base..... et 23 s'appelle l'exposant.....
- (c) Les nombres $\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels (ou irrationnels).....
- (d) Dans l'expression $\frac{12}{-7}$, -7 s'appelle le denominateur.....
- (e) $\frac{77}{8}$ est un nombre rationnel.....
- (f) $\frac{77}{8}$ est l'opposé..... de la fraction $-\frac{77}{8}$

/7 points

Exercice 2

- (a) Ecrire comme puissance de 10 : «Mille milliards de mille millions de mille sabords ! »

$$10^3 \cdot 10^9 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^3 = 10^{24}$$

/2 points

- (b) $-6 - 3 \cdot 8 = -6 - 24 = -30$

/1 point

- (c) ~~$-6 - 3 \cdot 8$~~ $-6 - 38 = -44$

/1 point

- (d) $-a - 3a = -4a$

/1 point

- (e) Calculer $[(3+9)-3-(4+6 \cdot 2)-1-6] \cdot 5 - 1 \cdot (3-4) + 1$

$$= [(12-3-16-1-6) \cdot 5 - 1] \cdot (-1) + 1$$

$$= [-14 \cdot 5 - 1] \cdot (-1) + 1$$

$$= [-70 - 1] \cdot (-1) + 1$$

$$= (-71) \cdot (-1) + 1$$

$$= 71 + 1$$

$$= 72$$

/4 points

Exercice 3

Calculer en donnant le résultat sous forme irréductible (rappel : on doit voir le détail des calculs) :

$$(a) \quad \frac{-(-2)^0}{-(-1)^{201} \cdot (-1)^{202}} = \frac{-1}{-(-1) \cdot 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

/3 points

$$(b) \quad \frac{1}{24} - \frac{1}{36} + \frac{1}{8} = \frac{3}{72} - \frac{2}{72} + \frac{9}{72} = \frac{3-2+9}{72} = \frac{10}{72} = \frac{5}{36}$$

/3 points

$$(c) \quad \frac{\left(\frac{14^{25}}{11}\right)^{10}}{2^{249} 49^{125} 11^9} = \frac{\left[\frac{(2 \cdot 7)^{25}}{11}\right]^{10}}{2^{249} \cdot (7^2)^{125}} = \frac{\left[\frac{2^{25} \cdot 7^{25}}{11}\right]^{10}}{2^{249} \cdot 7^{250}}$$

$$= \frac{2^{250} \cdot 7^{250}}{11^{10}} \cdot \frac{11^9}{2^{249} \cdot 7^{250}} = \frac{2^{250} \cdot 7^{250}}{11^{10}} \cdot \frac{11^9}{2^{249} \cdot 7^{250}} = \frac{2}{11}$$

/4 points

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] : \left(\frac{\frac{1}{-2} - \frac{-1}{4}}{\frac{2 \cdot 18}{16} \cdot \frac{8 \cdot 1}{27}} \right)^2 = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{64} \right) : \left(\frac{\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right]^2}{\frac{1}{3}} \right) \\
 & = \left(\frac{8-1}{64} \right) : \left(\frac{\left[-\frac{2+1}{4} \right]^2}{\frac{1}{3}} \right) \\
 & = \left(\frac{7}{64} \right) : \left(\frac{\left(-\frac{1}{4} \right)^2}{\frac{1}{3}} \right) \\
 & = \left(\frac{7}{64} \right) : \left(\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}} \right) \\
 & = \frac{7}{64} : \left[\frac{1}{16} \cdot \frac{3}{1} \right] \\
 & = \frac{7}{64} : \frac{3}{16} = \frac{7}{64} \cdot \frac{16}{3} \\
 & = \frac{7}{4} \\
 & = \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

/5 points

Exercice 4

Simplifier le plus possible et donner une réponse sans exposant négatif :

$$\text{(a)} \quad \frac{(a^2)^3 \cdot a^5}{(a^2 \cdot a^5)^3} = \frac{a^6 a^5}{(a^7)^3} = \frac{a^{11}}{a^{21}} = \frac{1}{a^{10}}$$

/3 points

$$(b) \frac{a(a^3 \cdot ab^2)^{-1}}{((ab)^{-2} a^3 b^5)^3} = \frac{a(a^4 b^2)^{-1}}{(a^{-2} b^{-2} a^3 b^5)^3} = \frac{a \cdot a^{-4} b^{-2}}{(a^1 b^3)^3} = \frac{a^{-3} b^{-2}}{a^3 b^9} = \frac{1}{a^6 b^{11}}$$

/4 points

Exercice 5

- (a) Si on vit exactement 85 ans, combien cela représente-t-il de semaines? *et qu'il y a 365 jours par an, quel sera le jour de notre mort*
 Si on naît un lundi, quelle sera le jour de notre mort?

$$85 \cdot 365 = 31025$$

$$31025 = 4432 \cdot 7 + 1$$

C'est donc un mardi

/4 points

- (b) En Suisse, la vitesse maximale autorisée sur autoroute est 120 km/h. Convertir cette vitesse en m/s.

$$\frac{120(\text{km})}{1(\text{h})} = \frac{120 \cdot 1000(\text{m})}{60 \cdot 60(\text{s})} = \frac{120000}{3600} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

$$= \frac{100}{3} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \approx 33,3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

/2 points

- (c) Trois pâtisseries fabriquent 72 pâtisseries en 4 heures. En combien de temps, avec une efficacité identique, deux pâtisseries fabriqueront-ils 240 pâtisseries ?

facteur 3
proportionnel ↓

$$\begin{aligned} & [3 P \sim 72 p] \sim 4 h \\ & [1 P \sim 24 p] \sim 4 h \\ & 1 P \sim [240 p \sim 40 h] \end{aligned}$$

facteur 10 proportionnel ↓

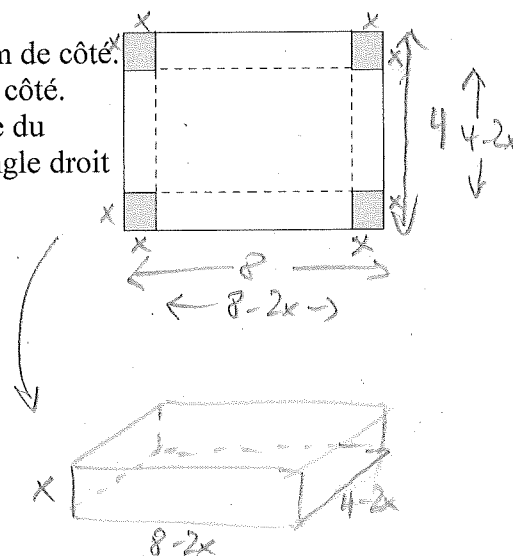
facteur 2 inversement proportionnel ↓

$$[2 P] \sim 240 p \sim [20 h]$$

Il faut 20h à 2 pâtisseries pour fabriquer 240 pâtisseries.

/2 points

- (d) On dispose d'un rectangle en carton de 8 cm par 4 cm de côté. A chaque coin, on découpe un petit carré de x cm de côté. Donner la formule algébrique qui exprime le volume du parallélépipède rectangle qu'on obtient en pliant à angle droit le carton ainsi découpé le long des traitillés :



$$V = x(8-2x)(4-2x)$$

$$\left[\begin{aligned} &= x \cdot 2(4-x) \cdot 2(2-x) \\ &= 4x(4-x)(2-x) \end{aligned} \right]$$

/3 points

Exercice 6

- (a) Ecrire $\frac{182}{11}$ sous forme de nombre décimal (détail de la procédure incluse).

$$\begin{array}{r}
 182 | 11 \\
 \underline{176} \\
 60 \\
 \underline{55} \\
 50 \\
 \underline{44} \\
 6
 \end{array}$$

même reste

$$\frac{182}{11} = 16,54\overline{54}$$

/3 points

- (b) Ecrire $2,0\overline{34}$ sous forme de fraction irréductible.

$$\begin{aligned}
 x &= 2,0\overline{34} \\
 10x &= 20,\overline{34} \\
 1000x &= 2034,\overline{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{donc} \quad \frac{1000x}{10x} = \frac{2034,\overline{34}}{20,\overline{34}} \\
 \hline
 990x = 2014
 \end{array}$$

$$\text{càd} \quad x = \frac{2014}{990} = \frac{1007}{495}$$

/3 points

Exercice 7

Simplifier au maximum et donner la réponse en valeur exacte avec un dénominateur entier :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-2} &= \frac{\sqrt{8}+2}{\sqrt{8}+2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8} + 2\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2 - 2^2} = \frac{8 + 2\sqrt{4 \cdot 2}}{8 - 4} \\
 &= \frac{8 + 2 \cdot 2\sqrt{2}}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{4} = \cancel{4} \frac{(2 + \sqrt{2})}{\cancel{4}} \\
 &= 2 + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

/3 points

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \frac{\sqrt{8} + \sqrt{12}}{\sqrt{6}} &= \left(\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{12} + 2\sqrt{18}}{6} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{2}}{6} \\
 &= \frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2}}{6} = \cancel{2} \frac{(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{\cancel{3}} \\
 &= \frac{1}{3} (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

/3 points

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \sqrt{80} - 2\sqrt{18} - 7\sqrt{20} + \sqrt{14}\sqrt{7} &= \sqrt{16 \cdot 5} - 2\sqrt{9 \cdot 2} - 7\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{2 \cdot 7} \sqrt{7} \\
 &= 4\sqrt{5} - 2 \cdot 3\sqrt{2} - 7 \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{2 \cdot 7} \sqrt{7} \\
 &= 4\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 14\sqrt{5} + 7\sqrt{2} \\
 &= -10\sqrt{5} + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

/4 points

Exercice 8 [facultatif]

Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnelSupposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ On pourrait écrire $\sqrt{2}$ comme une fraction: $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$
 $q \in \mathbb{Z}^*$ et avec $\frac{p}{q}$ irréductible.On aurait alors: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ d'où $\frac{p^2}{q^2} = 2$

$$\Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad (*)$$

 $\Rightarrow p^2$ est pairMais si p^2 est pair, p est forcément pair aussi!donc on pourrait écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

et on aurait dans (*):

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow 2k^2 = q^2$$

$$\Rightarrow q^2 \text{ est pair}$$

Et si q^2 est pair, q le serait aussi!et donc on aurait p et q pairs avec $\frac{p}{q}$ irréductible!!!C'est absurde, donc $\sqrt{2}$ ne peut pas appartenir à \mathbb{Q} càd $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

/max +5 points