Travail de mathématiques n°2

<table>
<tr>
<td>
Date : 30 novembre 2016
Durée : 90'
Enseignant : Jean-Marie Delley
Cours : 1Ma1DF02
Matériel autorisé
Calculatrice personnelle non programmable et non graphique
Remarques

Répondre directement sur l'énoncé.
Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; <u>il est important de donner tous les détails des calculs</u>.
Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
Indiquez vos initiales en haut de chaque page

</td>
<td>
Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ....

Notations (une coche par faute) :
<table><tr><td>Fautes :</td><td>.... / 2</td></tr></table>
Français (une coche par faute) [bonus] :
<table><tr><td>Fautes :</td><td>.... / 1</td></tr></table>
Total des points des exercices : /88

Total des points de l'épreuve : /90

Note : / 6
</td>
</tr>
</table>

Exercice 2 *(environ 3 points)*

Traduire en français les expressions algébriques suivantes où x est un nombre quelconque :

(a) $(x+2)^2$ le carré de la somme d'un nombre et de 2. /2

(b) $2\cdot(x-4)$ le double de la différence entre un nombre et 4 /2

Traduire les expressions suivantes en langage algébrique quelconque :

(c) Un entier naturel qui se termine par 18.

$100n+18$, avec $n \in \mathbb{N}$ /2

(d) Le quotient de deux nombres pairs positifs consécutifs.

$\frac{2n}{2n+2}$ avec $n \in \mathbb{N}$ /2

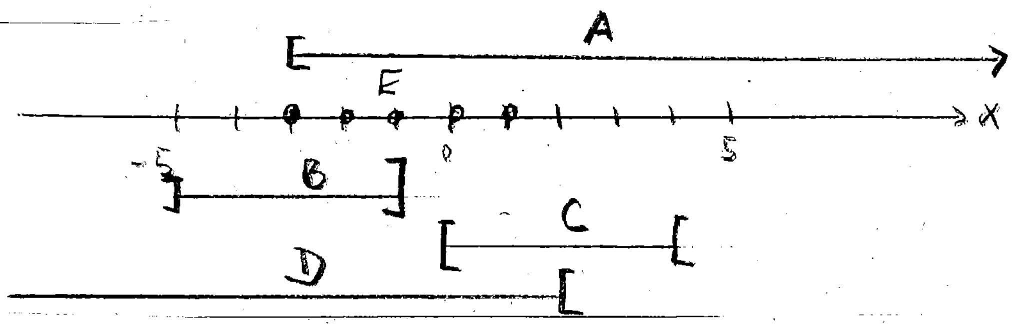
Exercice 1 *(environ 17 points)*

(a) Compléter le tableau suivant:

A	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x\}$	$[-3;+\infty[$
B	$\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -1\}$	$]-5;-1]$
C	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\}$	$[0;4[$
D	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	$]-\infty;2[$
E	$\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$	$\{-3;-2;-1;0;1\}$

/5

(b) Représenter A, B, C, D et E ci-dessous sur une droite réelle :



/5

(c) Déterminer avec la notation adéquate sous forme d'intervalle :

i. $A \cup B =]-5;+\infty[$

ii. $B \cup D = D =]-\infty;2[$

iii. $C \cap D = [0;2[$

iv. $A \cap C = C = [0;4[$

v. $A \cap D = [-3;2[$

vi. $A \setminus B =]-1;+\infty[$

vii. $B \setminus A =]-5;-3[$

/7

Exercice 3 *(environ 10 points)*

On considère les conjectures suivantes.

- les écrire sous la forme d'une implication,
- puis déterminer si elles sont vraies ou fausses,
- en justifiant précisément.

(a) Conjecture 1: Le produit de deux nombres pairs consécutifs est pair .

Si on considère 2 nombres pairs consécutifs, alors leur produit est pair

ou Si " " le produit de 2 nbres pairs consécutifs, alors il est pair /1

Vraie

dém $2n$ et $2(n+1)$ sont 2 nbres pairs consécutifs $(n \in \mathbb{N})$ [déf "pair" et "consécutifs"]

$2n \cdot 2(n+1)$ est leur produit [déf "produit"]

$= 4n(n+1)$ [réécriture]

$= 2(\underbrace{2n(n+1)}_{\in \mathbb{N}})$ est un nbre pair [déf ("pair")] /3+3

(b) Conjecture 2: Pour *n* un entier naturel, $3n+11$ est premier

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $3n+11$ est premier

Faux

Contre-exemple : $n = 3$: $3 \cdot 3 + 11 = 20 = 5 \cdot 4$ n'est pas premier

/2

Exercice 4 *(environ 18 points)*

On considère la conjecture suivante:

Le carré d'un nombre impair est impair.

(a) L'écrire sous forme d'une implication.

HYP CONCL

Si n est impair, alors n^2 est impair /2

(b) Identifier clairement hypothèse(s) et conclusion(s) /1
(vous pouvez directement les entourer et les identifier ci-dessus)

(c) Donner une hypothèse implicite de cet énoncé. /1

$n \in \mathbb{N}$

(d) Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Vraie;

dém. n impair [hyp]

$n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ [déf "impair"]

d'où $n^2 = (2k+1)^2$ [déf carré]

$= 4k^2 + 4k + 1$ [id. rem.]

$= 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{\in \mathbb{N}}+1$ [mise en évidence partielle]

est impair [déf "impair"] /3+3

(e) Enoncer sa contraposée. /2

Si n^2 n'est pas impair, alors n n'est pas impair.

(f) Cette ~~réciproque~~ contraposée est-elle vraie ou fausse? Justifier. /2

Vraie car une implication et sa contraposée sont vraies ou fausses ensemble.

~~(g) Enoncer sa réciproque.~~

(g) Enoncer sa réciproque.

Si n^2 est impair, alors n est impair /2

(h) Il est difficile de démontrer que cette réciproque est vraie … Quelle stratégie pourrait-on utiliser ? (on ne demande pas la démonstration).

On peut considérer la contraposée de la réciproque :

Si n n'est pas impair, alors n^2 n'est pas impair /2

c.à.d. si n est pair, alors n^2 est pair

qu'on saurait démontrer

Exercice 5 *(environ 8 points)*

Soient $A(3;9)$ et $B(-3;-1)$.

(a) <u>Calculer</u> le milieu entre A et B

$M = \left(\frac{3+(-3)}{2} ; \frac{9+(-1)}{2}\right) = (0;4)$ /2

(b) <u>Calculer</u> les coordonnées du point C tel que $M(2;1)$ soit le milieu du segment $[AC]$.

$C(x;y) \Rightarrow (2;1) = \left(\frac{x+3}{2} ; \frac{y+9}{2}\right)$

$\begin{cases} 2 = \frac{x+3}{2} \\ 1 = \frac{y+9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4 \\ y+9 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -7 \end{cases}$

$C = (1;-7)$ /3

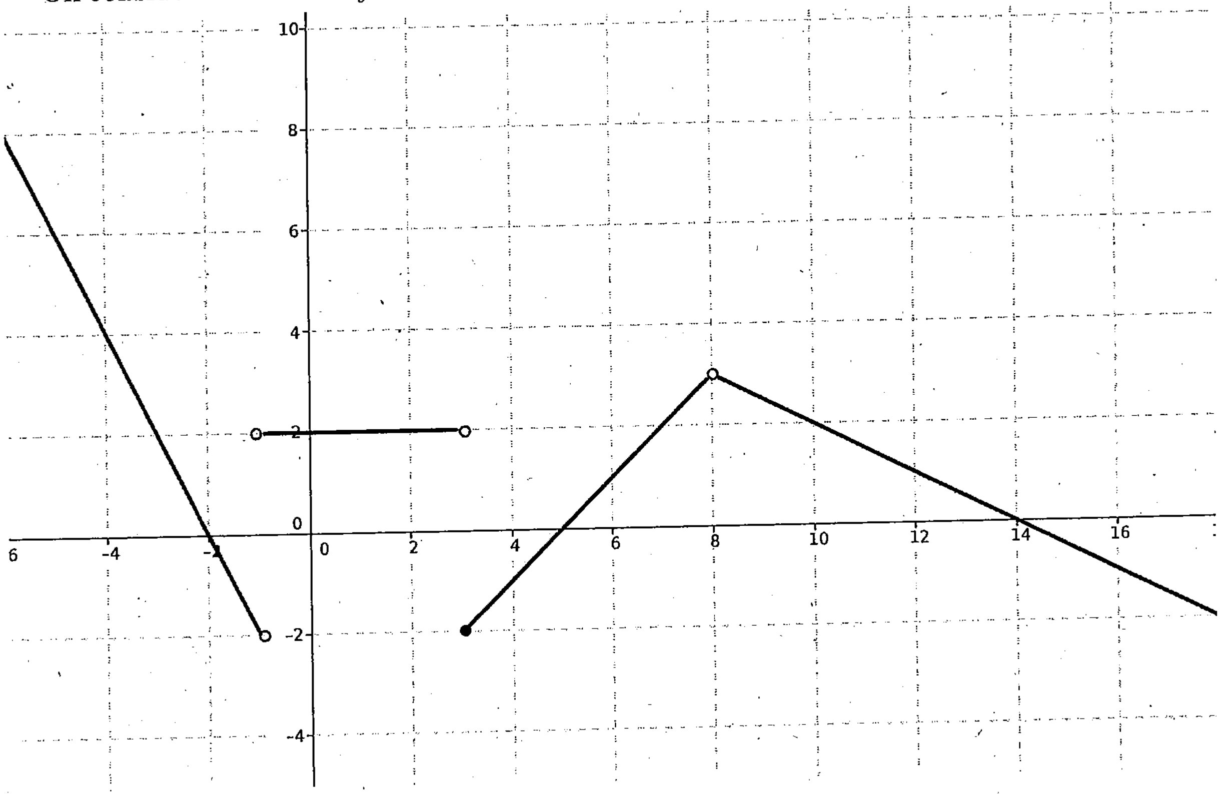
(c) <u>Calculer</u> la distance entre A et B.

$\delta = \sqrt{(-3-3)^2 + (-1-9)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-10)^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136}$

$= \sqrt{4 \cdot 34} = 2\sqrt{34}$ /2 /1

Exercice 6 *(environ 16 points)*

On considère la fonction f ci-dessous, donnée par sa courbe représentative sur [-6;18]:



Déterminer à l'aide de cette représentation graphique :

(a) $f(2)$ = 2 0.5

(b) l'image de 3 est -2.... 0.5

(c) $f(-1)$ ∅ 1

(d) Ensemble des zéros : Z_f = {-2; 5; 14} 1

(e) l'ordonnée à l'origine de f est 2 0.5

(f) $f^{-1}(-4)$ = ∅ 1

(g) l'ensemble des préimages de 2 est ....{3; 18}...... 1

(h) $f^{-1}(4)$ = {-4} 1

(i) le tableau de signes de f

x	-6		-2		-1		3		5		8		14		18
f(x)		+	0	-	∅	+	-	-	0	+	∅	+	0	-	

4

(j) les valeurs de x telles que $f(x)$ est négative [-2; -1[∪ [3; 5] ∪ [14; 18] 2

(k) Domaine de définition : D_f = [-6; 18] \ {-1; 8} 1.5

(l) $f^{-1}(2)$ =]-1; 3[∪ {-3; ~~7~~; 10} 2

Exercice 7 *(environ 6 points)*

Vrai ou faux ? Justifier.

(a) Si a est un nombre réel positif, alors $a^2 \geq a$

Faux
Contre-exemple : $a = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \overset{?}{\geq} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2}$ non

(b) Si f est définie par $f(x) = \sqrt{8-x}$, alors $D_f = [8;+\infty[$

Faux
$7 \in D_f$, car $\sqrt{8-7} = \sqrt{1} = 1$ existe
alors que $7 \notin [8, +\infty[$

(En fait : $D_f =]-\infty; 8]$)