| Travail de mathématiques n°3 | |
|---|---|
| Date : 35 avril 2017<br>Durée : 90'<br>Enseignant : Jean-Marie Delley<br>Cours : 1Ma1DF02<br>Matériel autorisé<br>o Calculatrice personnelle non programmable et non graphique<br>Remarques<br>o Répondre directement sur l'énoncé.<br>o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de donner tous les détails des calculs.<br>o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!<br>o Indiquez vos initiales en haut de chaque page | **Nom:** ........................................................<br>**Prénom:** ..................................................<br>**Groupe:** ..................................................<br>Notations (une coche par faute) :<br>Fautes : .... / 1<br>Français (une coche par faute) [bonus] :<br>Fautes : .... / 1<br>Total des points des exercices : ...... /51<br>Total des points de l'épreuve : ...... /52<br>Note : / 6 |

## Début du travail

Exercice 1 (environ 16 points)

Factoriser le plus possible chacune des expressions :

(a) $x^2 - 14x + 45 = (x-9)(x-5)$ IR 4 /2

(b) $f(x)=6x^2-11x-35$

$\Delta = b^2-4ac = (-11)^2-4\cdot 6(-35) = 121+840 = 961$

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11\pm\sqrt{961}}{12} = \frac{11\pm 31}{12}$ $\to x_1 = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$ $\to x_2 = \frac{-20}{12} = -\frac{5}{2}$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 6(x-7/2)(x+5/2)$

/4

(c) $2c^2a^2-16abc^2+32b^2c^2$

$= 2c^2(a^2-8ab+16b^2)$

$= 2c^2(a-4b)^2$

/3

(d) $(2x-1)x^4(x^2+4)-4x^2(x^2+4)(2x-1)$

$= (2x-1)x^2\cdot(x^2+4)\cdot[x^2-4]$

$= (2x-1)x^2(x^2+4)(x-2)(x+2)$

/4

(e) $(a+b)\cdot(x-y)-(a-b)(y-x)$

$= (a+b)(x-y) - (a-b)(-1)(x-y)$

$= (x-y)\left[(a+b)+(a-b)\right]$

$= (x-y)\left[2a\right]$

/3

Exercice 2 (6 points)

(/6)

Résoudre les équations suivantes en donnant les réponses exactes simplifiées au maximum :

(a) $3x^2-30x+90=0$ $\Leftrightarrow 3(x^2-10x+30)=0$ $\div 3$

$\Leftrightarrow x^2-10x+30=0$

$\Delta = (-10)^2-4\cdot1\cdot30<0$

$S=\emptyset$

/3

(b) $2x^2=100$ $\Leftrightarrow 2x^2-100=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2-50)=0$ $\div 2$

$\Leftrightarrow x^2-50=0$

$\Leftrightarrow x^2=50$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{50}=\pm\sqrt{25\cdot2}=\pm5\sqrt{2}$

$S=\{-5\sqrt{2};5\sqrt{2}\}$

/3

Exercice 3 (environ 10 points)

On considère la fonction $f$ définie par. $f(x) = x^2 - 2x + 4$

(a) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique en utilisant explicitement la complétion du carré puis vérifier avec les formules directes que la solution est correcte.

$f(x) = x^2 - 2x + 4$

$= (x-1)^2 - 1 + 4$

$= (x-1)^2 + 3$

/2

$k = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$m = -\frac{\Delta}{4a} = -\left(\frac{(-2)^2 - 4\cdot1\cdot4}{4}\right) = +3$

$f(x) = a(x-k)^2 + m$

$= 1\cdot(x-1)^2 + 3$ ✓

/2

(b) Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de $f$.

axe : $x = k$

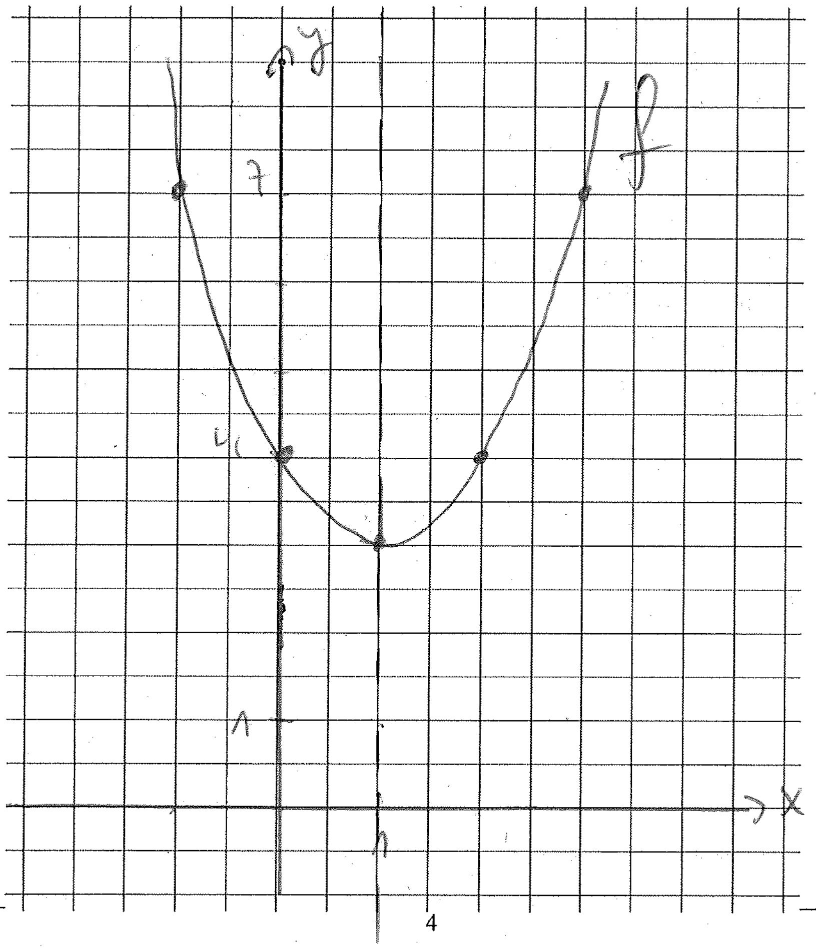
$x = 1$

sommet : $S = (\cancel{k}; \cancel{m})$

$= (1; 3)$

/2 nt

(c) La représenter graphiquement ci-dessous de façon précise.




or $f(0) = 4$

$\Rightarrow f(2) = 4$

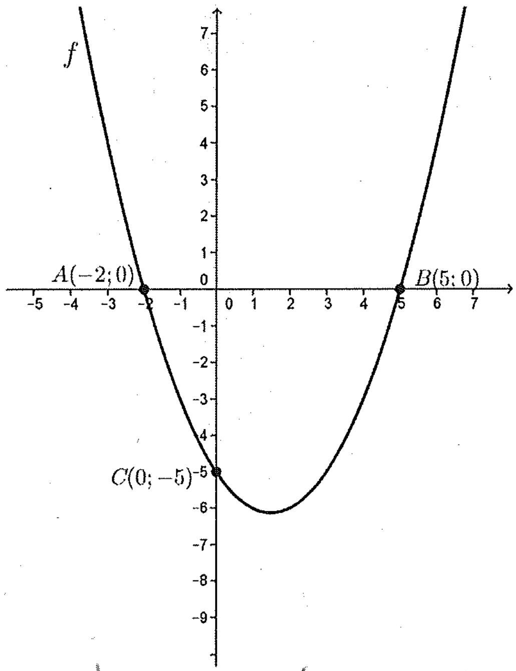
$+ \quad f(-1) = 1 + 2 + 4 = 7$

$\Rightarrow f(3) = 7$

/4

Exercice 4 *(environ 10 points)*

On donne ci-dessous des représentations graphiques d'une fonction $f$ de degré 2.
Déterminer les trois expressions algébrique de $f(x)$ de $f$ (développée, canonique et factorisée).
Les seules informations directement utilisables sont que la parabole contient les points $A$, $B$ et $C$. D'autres informations ne peuvent pas être obtenues par lecture graphique mais uniquement par des calculs ou des arguments.




$Z_f = \{-2;5\}$ donc $f(x) = a(x+2)(x-5)$ /2

$f(0) = -5$ donc $-5 = a(0+2)(0-5)$

$-5 = a(-10)$ /2

$a = \frac{1}{2}$

d'où $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-5)$ : forme fact

$= \frac{1}{2}(x^2-3x-10) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{10}{2}$ : forme dév. /2

axe : $x = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$ (situé entre les 2 zéros)

sommet : $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+2\right)\left(\frac{3}{2}-5\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{49}{8}$ donc $S = \left(\frac{3}{2};-\frac{49}{8}\right)$

$f(x) = a(x-k)^2+m = \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{8}$ : forme can. /4

Exercice 5 *(environ 12 points)*

Le propriétaire d'un verger d'abricots a calculé que s'il plante 48 arbres sur son terrain, chaque arbre produit 600 abricots par année.

De plus, il estime que chaque fois qu'il plante un arbre supplémentaire sur son terrain, la production de chaque arbre diminue de 6 abricots.

(a) On note $x$ le nombre d'arbres supplémentaires. On a alors que le nombre total $T$ d'abricots récoltés par année en fonction de $x$ est : $T(x) = -6x^2 + 312x + 28800$. Expliquer pourquoi.

$$T(x) = \underbrace{(48 + x)}_{\text{nouveau nombre d'arbres}} \cdot \underbrace{(600 - 6x)}_{\text{nouveau nombre d'abricots}}$$

$$= 48 \cdot 600 + 600x - 6 \cdot 48x - 6x^2$$

$$= 28800 + 312x - 6x^2$$

/4

(b) Combien faut-il planter d'arbres supplémentaires pour récolter le maximum d'abricots possible ?

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{312}{-12} = 26$$

$$m = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{[312^2 - 4(-6) \cdot 28800]}{4(-6)} = \frac{97344 + 691200}{24} = \frac{788544}{24} = 32856$$

Sommet : $(26 ; 32856)$

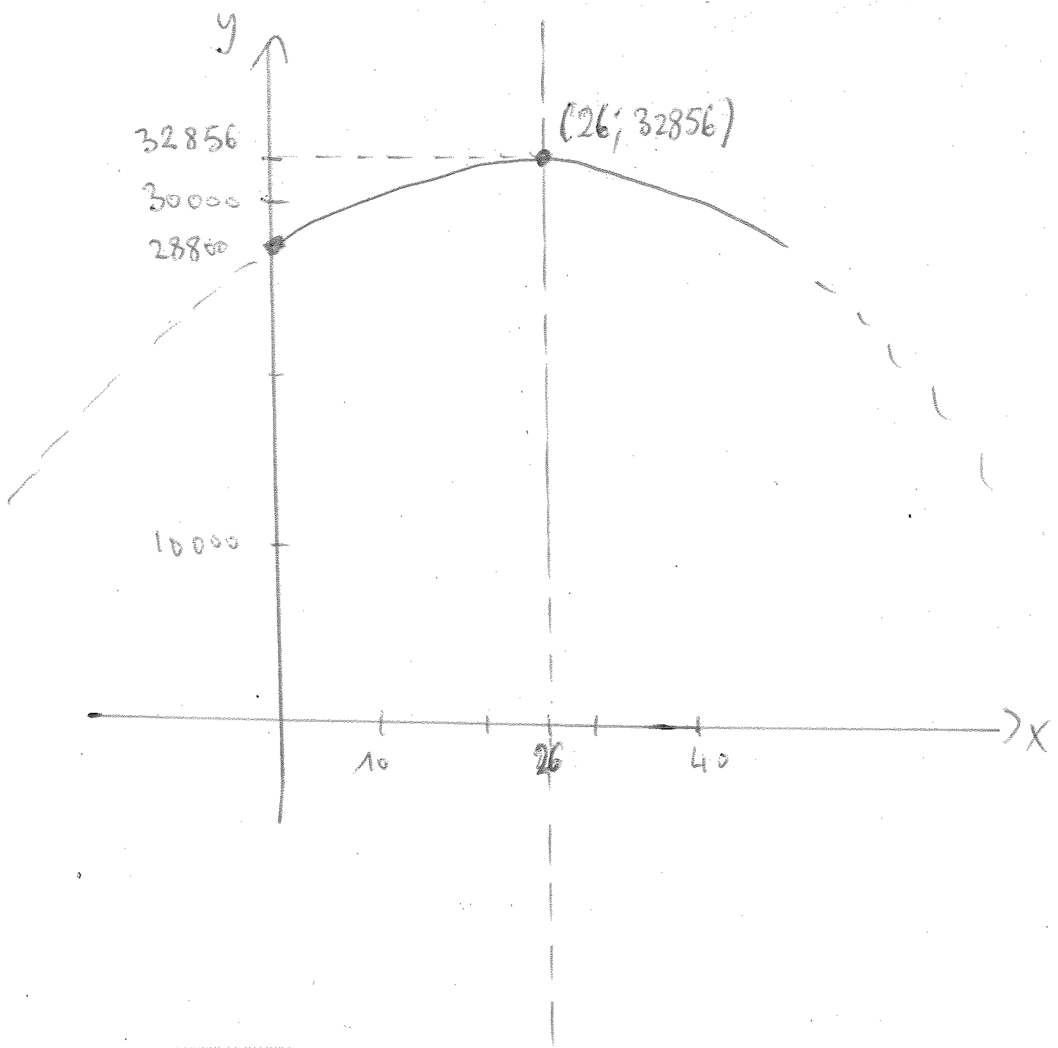
Il faut planter 26 arbres suppl.

(c) Quel est alors le nombre maximal d'abricots récoltées par an ?

Il y a alors 32856 abricots

/5

(d) Interpréter graphiquement. On ne demande pas une représentation graphique complète de la fonction mais seulement d'illustrer les réponses obtenues en (b) et (c).




/3