Thm "Propriété des puissances"

Si a et b sont deux réels (non nuls) et n et m des entiers naturels, alors on a :

(i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(ii) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

(iii) $\left(\frac{a^n}{a^m}\right) = a^{n-m}$

(iv) $(ab)^n = a^n b^n$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Remarque : on a vu au ch1 que $a^{m^n} = a^{(m^n)}$ et donc $a^{m^n} \neq (a^m)^n$!

Démonstration

(i) $a^n \cdot a^m = \underbrace{(a\cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\text{-fois}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\text{-fois}}$ [par déf a^n avec n entier naturel]

$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \ldots \ldots a}_{(n+m)\text{-fois}}$

$= a^{n+m}$ [idem]

(ii) $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m\text{ fois}}$ [idem]

$= \underbrace{\underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\text{-fois}} \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\text{-fois}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\text{-fois}}}_{m\text{-fois}}$ [idem]

$= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{(n\cdot m)\text{-fois}}$

(iii) $\frac{a^n}{a^m} = \frac{a \cdot \ldots \cdot a}{a \cdot \ldots \cdot a} \begin{array}{l} \leftarrow n\text{ fois} \\ \leftarrow m\text{ fois} \end{array}$ [par déf. a^n avec n entier naturel]

cas 1 : si $n > m$: $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}$ ← reste $(n-m)$-fois "a" au numérateur

$= a^{n-m}$ [par déf a^n avec ...]

cas 2 : si $n=m$: $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\cancel{a}\cdot\cancel{\ }\cdots\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot\cancel{\ }\cdots\cancel{a}}$ [par déf de a^n avec n naturel]

$= 1$

$= a^0$ [par déf de a^0]

$= a^{n-m}$ [car $n=m$ dans ce cas]

cas 3 : si $n<m$: $\frac{a^n}{a^m} = \frac{\cancel{a}\cdot\cancel{\ }\cdots\cancel{a}}{\cancel{a}\cdot\cancel{\ }\cdots\cancel{a}\cdot a\cdot\cdots\cdot a}$ ← reste $(m-n)$-fois a au dénominateur

$= \frac{1}{a^{m-n}}$ [par déf a^n avec n naturel]

$= a^{-(m-n)}$ [par déf de a^n avec n naturel négatif]

$= a^{-m+n}$ [distributivité]

$= a^{n-m}$

(iv) $(a b)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n\text{-fois}}$ [par déf de x^n avec n entier naturel]

$= \underbrace{(a\cdot a\cdots a)}_{n\text{-fois}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdots b)}_{n\text{-fois}}$ [par commutativité, càd $a\cdot b = b\cdot a$ de la multiplication] [argument non exigé]

$= a^n\cdot b^n$ [par déf de x^n avec n entier naturel]

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n\text{-fois}}$ [par déf de x^n avec n naturel]

$= \frac{a\cdot a\cdots a}{b\cdot b\cdots b}$ n-fois [par déf. de la multiplication de fractions]

$= \frac{a^n}{b^n}$ [par déf de x^n avec n naturel]

Remarque très importante :

On peut aussi démontrer que ce théorème est toujours vrai lorsque m et n sont des nombres réels et que les nombres manipulés ainsi sous forme de puissances existent

(il s'agit d'éviter les cas du type $(-2\cdot 3)^{1/2} = (-2)^{1/2}\, 3^{1/2}$) n'existe pas car égal à $\sqrt{-2}$