Travail de groupe ch 3 - Corrigés

ex 1 :

(a) x ; y les 2 nbres

$$\begin{cases} y - x = 2 \text{ c'est-à-dire } y = x+2 \\ \sqrt{x \cdot y + 1} \end{cases}$$

on substitue $y = x+2$:

$$\sqrt{x(x+2)+1}$$

exploration : $x = 4$ $(y = 6)$: $\sqrt{4 \cdot 6 + 1} = \sqrt{25} = 5$

$x = -7$ $(y = -5)$: $\sqrt{(-7)(-5)+1} = \sqrt{64} = 8$

$x = 11$ $(y = 13)$: $\sqrt{11 \cdot 13 + 1} = \sqrt{144} = 12$

(b) le résultat est toujours un carré

(c) Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x(x+2)+1$ est un carré
(ie $\sqrt{x(x+2)+1}$ est un nombre entier)

(d) démonstration :

$$x(x+2)+1 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{[développer]}$$
$$= (x+1)^2 \quad \text{[id. rem 1]}$$

(e) la même démonstration est également valable pour tout nombre entier

ex2 : (a) $n \in \mathbb{N}$

$(14n+5)\cdot 7 + 2n$

exploration : $n = 1$: $(14+5)\cdot 7 + 2 = 135$

$n = 2$: $(28+5)\cdot 7 + 4 = 235$

$n = 7$: ... $= 735$

$n = 15$: ... $= 1535$

(b) le résultat est toujours :

- un multiple de 5
- un nombre qui se ~~terminé~~ termine par 35
- le nombre formé par n centaines et 35 unités

(c) Conjecture : Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(14n+5)\cdot 7 + 2n$ est un nombre formé de n centaines et 35 unités

(d) démo :

$(14n+5)\cdot 7 + 2n = 98n + 35 + 2n$ [distributivité]

$= 100n + 35$ [réduire]

Or est $n \in \mathbb{N}$ [par hypothèse]

donc $100n + 35$ est formé de n centaines et 35 unités [thm "se termine par..."]

(e) $(14n+5)\cdot 7 + 2n = 1065$

$\Leftrightarrow 100n + 35 = 1065$

$\Leftrightarrow 100n = 1030$

$\Leftrightarrow n = 10{,}3$

$\notin \mathbb{Z}$

donc c'est impossible

ex 3 :

(a) $n \in \mathbb{N}$

$(3n+1)\cdot 4 - 2n = 12n + 4 - 2n = 10n + 4$

$n = 2$: $(3\cdot 2+1)\cdot 4 - 2\cdot 2 = 24$

$n = 5$: $(3\cdot 5+1)\cdot 4 - 2\cdot 5 = 54$

$n = 12$: $(3\cdot 12+1)\cdot 4 - 2\cdot 12 = 124$

(b) le résultat est toujours :

- un multiple de 2
- un nombre qui se ~~termine~~ par 4
- un nombre formé de n dizaines et 4 unités

(c) Conjecture : Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(3n+1)\cdot 4 - 2n$ est un nombre formé de n dizaines et 4 unités

(d) démo : $(3n+1)\cdot 4 - 2n = 12n + 4 - 2n$ [distributivité]

$= 10n + 4$ [réduire]

Or $n \in \mathbb{N}$ [hypothèse]

donc $10n + 4$ est formé de n dizaines et 4 unités [thm "se termine par ..."]

(e) $10n + 4 = -76$

$\Leftrightarrow 10n = -80$

$\Leftrightarrow n = -8$

c'est donc possible si on part avec $n = -8$

vérif : $[3(-8)+1]\cdot 4 - 2(-8) = (-24+1)\cdot 4 + 16$

$= -23\cdot 4 + 16$

$= -76$

Ex 4

(a) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $8n+1$ se termine par 1

Faux ; contre-exemple
$n = 2$: $8.2+1 = 17$

remarque : on peut aussi écrire
Si on considère un nombre (entier) (avec $n \in \mathbb{N}$) de type $8n+1$, alors il se termine par 1

(c) Si $n \in \mathbb{N}$, alors n^2+n+11 est premier

Faux ; contre-exemple
$n = 11$: $11^2+11+11 = 11 \cdot [11+1+1] = 11 \cdot 13$
pas premier

remarque : on peut aussi écrire
Si on considère l'expression n^2+n+11 avec $n \in \mathbb{N}$, alors c'est un nbre premier

(b) Si on considère la somme de 3 entiers consécutifs, alors c'est un mult de 3

Vrai : dém :
On considère la somme de 3 entiers consécutifs [pour hypothèse]
càd $n+(n+1)+(n+2)$ où $n \in$ [déf de "somme"/"consécutif"]
$= 3n+3$ [réduction]
$= 3(n+1)$ [mise en évidence]
Or $n \in \mathbb{N}$, donc $n+1 \in \mathbb{N}$ [hypothèse (implicite)]
d'où $3(n+1)$ mult de 3 [déf "multiple"]

ou, plus direct :

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n+(n+1)+(n+2)$ est multiple de 3

Vrai : dém : $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3$ [réduire]
$= 3(n+1)$ [mise en évidence]
Or $n \in \mathbb{N}$, donc $n+1 \in \mathbb{N}$ [hypothèse]
donc $3(n+1)$ mult de 3 [déf mult de 3]

(d) Si on considère la somme de 2 nbres impairs consécutifs, alors elle est paire

Vrai ; dém :

on considère la somme de 2 nbres impairs consécutifs [hyp]

càd : $(2n+1)+(2n+3)$ [déf "impair" / "consécutifs"]

$= 4n+4$ [réduire]

$= 4(n+1)$ [mettre en évidence]

Or $n \in \mathbb{N}$, donc $n+1 \in \mathbb{N}$ [hyp. (implicite)]

donc $4(n+1)$ mult de 4 [déf "multiple"]

Rem. on peut aussi écrire : si $n \in \mathbb{N}$, alors $(2n+1)+(2n+3)$ est pair

(e) Si on considère un nbre entier pair, alors il est somme de 2 impairs consécutifs

Faux ; contre-exemple : 3 ne peut pas être somme de 2 impairs consécutifs

en effet $\left\{\begin{array}{l} 3 = (2n+1)+(2n+3) \\ 3 = 4n+4 \\ 3 = 4(n+1) \\ 3 \text{ serait un multiple de } 4 \end{array}\right.$! par l'absurde !

(f) Si on considère un multiple de 7, alors son carré est multiple de 7

Vrai ; dém : on considère un multiple de 7 [hyp]

$n = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ [déf mult]

donc $n^2 = (7k)^2$ [substitution]

$= 49k^2$ [propr. puissances]

$= 7 \cdot 7 \cdot k^2$ [décomposition]

$= 7(7k^2)$ [réécriture]

Or $k \in \mathbb{Z}$, donc $7k^2 \in \mathbb{Z}$ [voir plus haut]

donc n^2 mult de 7 [déf "multiple"]

(g) Si on considère un multiple de 4 et un multiple de 6, alors leur produit est mult. de 24

Faux ; Contre-ex : soit 12 un mult de 4 et de 6

12 n'est pas un mult de 24

(h) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $30n + 11$ est premier

Faux ; contre-exemple : $n = 11 \Rightarrow 30 \cdot 11 + 11 = 11 \cdot (30+1) = 11 \cdot 31$ pas premier

(i)* Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n^2 + 3n + 5$ est impair

Vraie : demo

$$\begin{cases} 1^{er} \text{ cas : } n \text{ pair} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n^2 \text{ pair} \\ 3n \text{ pair} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n^2 + 3n \text{ pair} \\ 5 \text{ impair} \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \text{ impair !} \\ 2^{e} \text{ cas : } n \text{ impair} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n^2 \text{ impair} \\ 3n \text{ impair} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n^2 + 3n \text{ pair} \\ 5 \text{ impair} \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^2 + 3n + 5 \text{ impair} \end{cases}$$

(par distinction en 2 cas)

ex 5 :

(a) Si n est multiple de 9, alors n est multiple de 3 V

R : Si n " " " 3, " " " " " 9 F

(b) Si n est pair, alors n^2 est pair V

R : Si n^2 est pair, alors n est pair V

(c) Si n est mult. de 3, alors n est mult. de 9 F

R : Si " " " " 9, " " " " " 3 V

(d) Si n est mult de 3, alors n est mult de 5 F

R : " " " " " 5, " " " " " 3 F

ex 6 :

(a) Si $\underbrace{n \text{ est différence des carrés de 2 impairs consécutifs}}_{\text{HYP}}$, alors $\underbrace{n \text{ est multiple de } 4}_{\text{CONCL}}$

(b) $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}$

(c) Vraie ; dém : n est diff. des carrés de 2 impairs consécutifs [par hypothèse]

$\Rightarrow n = (2k+3)^2 - (2k+1)^2$ [déf "impair", "consécutifs", "différence"]

$= (4k^2+12k+9) - (4k^2+4k+1)$ [id. rem 2]

$= 8k+8$ [réduite]

$= 4(2k+2)$ [mise en évidence]

Or $k \in \mathbb{N}$ (ou à $\mathbb{Z}$ selon le choix initial) [hyp. implicite]

d'où n est multiple de 4 [déf "multiple"]

(d) Si n est mult. de 4, alors n est différence des carrés de 2 impairs consécutifs

(e) Fausse ; contre-exemple : $n = 4$

si 4 pouvait s'écrire comme diff. des carrés de 2 impairs consécutifs, on aurait $4 = 8k+8$ [voir (c)]

càd $4 = 8(k+1)$

et 4 serait un multiple de 8, ce qui est faux

(f) Si n n'est pas un mult de 4, alors n n'est pas diff. des carrés de 2 impairs consécutifs

(g) Elle est vraie comme la conj. de départ

(h) Si n n'est pas la diff. des carrés de 2 impairs consécutifs, alors n n'est pas multiple de 4

(i) Elle est fausse, comme la réciproque dont elle est la contraposée