Démonstrations en 1re année

Relation droite oblique / équation de droite oblique

Théorème

d est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n
si et seulement si
l'équation de d est $y=mx+n$

Démonstration

Il faut montrer que :

d est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n
si et seulement si
$y=mx+n$ est l'équation de d

ce qui peut aussi s'écrire :

d est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n $\Leftrightarrow$ $y=mx+n$ est l'équation de d

comme il s'agit d'une double implication, on peut la séparer en deux implications I et II réciproques l'une de l'autre qu0il s'agit de démontrer :

(I) si d est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n, alors $y=mx+n$ est l'équation de d

ce qui peut aussi s'écrire :

d est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n $\Rightarrow$ $y=mx+n$ est l'équation de d

cette implication est équivalente à :

$P(x_0;y_0) \in d$ une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n $\Rightarrow$ $(x_0;y_0)$ est une solution de l'équation $y=mx+n$

Nous démontrerons – au verso – cette dernière implication pour (I).

(II) si $y=mx+n$ est l'équation de d, alors d est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n

ce qui peut aussi s'écrire :

$y=mx+n$ est l'équation de d $\Rightarrow$ d est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine n

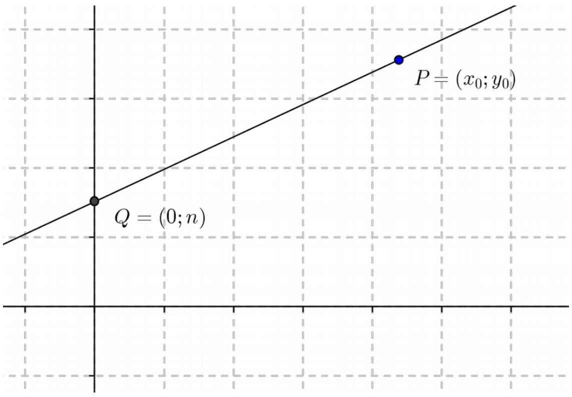
cette implication est équivalente à :

d est l'ensemble des solutions de $y=mx+n$ $\Rightarrow$ la pente calculée entre n'importe quelle paire de points de d est m et le point $(0;n)$ appartient à d

Nous démontrerons – au verso – cette dernière implication pour (II).

cc BY NC SA

Démonstration de (I)



Soit Q le point de d dont la 2e coordonnée est l'ordonnée à l'origine de d et soit $P(x_0;y_0)\in d$ avec $P\neq Q$

▪ n est l'ordonnée à l'origine de d [……………………..……]

▪$Q=(0;n)\in d$ [……………………………………………………]

▪ $P(x_0;y_0)\in d$ [……………………………………………………]

par ailleurs

▪ P et Q appartiennent à d [……………………………………]

donc

▪ la pente entre P et Q est égale à m [………………………]

▪ c'est-à-dire $\frac{y_0-n}{x_0-0}=m$ [……………………………….]

⇔ $y_0 - n = m(x_0 - 0)$ [………………………………]

⇔ $y_0 - n = mx_0$ […………………………………….]

⇔ $y_0 = mx_0 + n$ [… … … … … … … … … … … … …..]

d'où on conclut que $(x_0;y_0)$ est solution de $y=mx+n$ [… … … … … … … … … … … … … … … … … ….]

Démonstration de (II)

Soit $R(x_1;y_1)$ une solution quelconque de $y=mx+n$ (avec $x_1\neq 0$) et Q le point $Q(0;n)$.

on a

▪ Q est une solution de l'équation $y=mx+n$ […………………………………………]

par ailleurs

▪ R est une solution de $y=mx+n$ [……………………………......]

donc

▪ $y_1 = mx_1 + n$ [……………………………………….……………….]

⇔ $y_1 - n = mx_1$ [……………………………………..……………….]

$\frac{y_1-n}{x_1}=m$

⇔ $\frac{y_1-n}{x_1-0}=m$ [………………………………………………………..]

⇔ [……………………………………………..……..]

▪ on conclut que les pentes entre R et Q sont toujours égales (à m) [… … … … … … … … … … … …..]

▪ donc toutes les solutions R de $y=mx+n$ sont alignées [… … … … … … … … … … … …..]

elles appartiennent donc à une même droite d (de pente m)

▪ comme $Q(0;n)$ appartient également à cette droite [… … … … … … … … … … … …..]

on en déduit que n est l'ordonnée à l'origine de d [… … … … … … … … … … … …..]