Ch7 Exercices supplémentaires

ex1 : (a) $f(x) = x^2+5x+2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$

(b) $f(x) = -x^2+4x+4 = -(x^2-4x-4) = -[(x-2)^2-4-4]$

$= -[(x-2)^2-8] = -(x-2)^2+8$

(c) $f(x) = x^2+7x+4 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}+4 = \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$

(d) $f(x) = x^2-9x-7 = \left(x-\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - 7 = \left(x-\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{109}{4}$

(e) $f(x) = -x^2-x+3 = -(x^2+x-3) = -\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3\right]$

$= -\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right) = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$

(f) $f(x) = 2x^2+5x-6 = 2\left(x^2+\frac{5}{2}x-3\right) = 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - 3\right]$

$= 2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{16}\right] = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{8}$

ex2 : (a) $f(x) = \underbrace{x^2+5x+2}_{\text{dev.}}$ $\quad \Delta = 25-8 = 17$

$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$

fact : $f(x) = \left(x-\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)\right)$

can : $f(x) = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$ cf ex1(a) ou calcul de k et m

(b) $f(x) = \underbrace{-x^2+4x+4}_{\text{dev.}} = -(x^2-4x-4)$

$\Delta = (-4)^2 - 4(-4) = 32$

$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{32}}{2} = \frac{4\pm4\sqrt{2}}{2} = 2\pm2\sqrt{2}$

$= \underbrace{-[x-(2-\sqrt{2})][x-(2+\sqrt{2})]}_{\text{forme fact}}$

can : cf ex1(b) ou calcul de m=... k=...

(c) $f(x) = \underbrace{x^2+7x-4}_{\text{dev}}$ $\quad \Delta = 49-4\cdot1(-4) = 65$

$x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{65}}{2}$

fact : $f(x) = \left[x-\left(\frac{-7+\sqrt{65}}{2}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-7-\sqrt{65}}{2}\right)\right]$

can : cf ex1(c) ou calcul de m=...
k=...

(d) $f(x) = \underbrace{x^2 - 9x - 7}_{\text{obr.}}$ $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 81 + 28 = 109$

$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{109}}{2}$

fact: $f(x) = \left[x - \left(\frac{9 - \sqrt{109}}{2}\right)\right]\left[x - \left(\frac{9 + \sqrt{109}}{2}\right)\right]$

can: cf ex 1(d) ou calcul m = ... k = ...

(e) $f(x) = -x^2 - x + 3$ $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) \cdot 3 = 13$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{-2}$

fact: $f(x) = \left[x - \left(\frac{1 - \sqrt{13}}{-2}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{-2}\right)\right]$

can: cf ex 1(e) ou calcul m = ... k = ...

(f) $f(x) = 2x^2 + 5x - 6$ $\Delta = 25 - 4 \cdot 2(-6) = 25 + 48 = 73$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4}$

fact: $f(x) = \left[x - \left(\frac{-5 + \sqrt{73}}{4}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-5 - \sqrt{73}}{4}\right)\right]$

can: cf ex 1(f) ou calcul m = ... k = ...

ex 3

(a) o.o. = 2

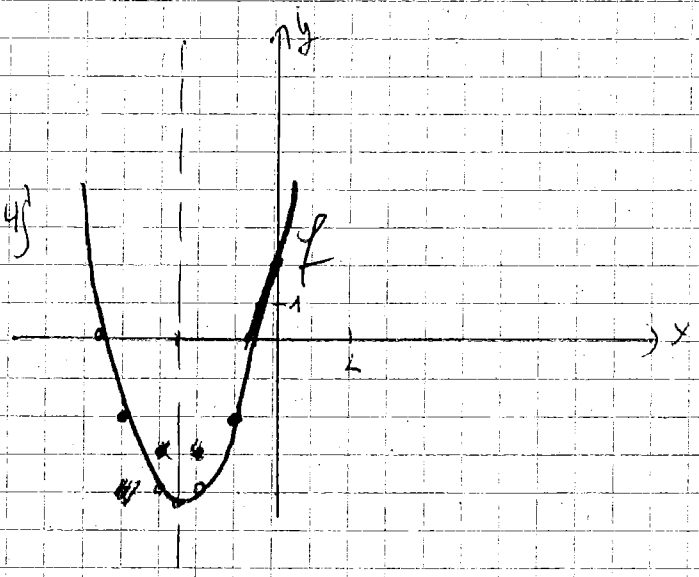
zéros: $Z_f = \left\{\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\} \cong \{-4{,}6; -0{,}4\}$

axe: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$

sommet: $S = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{17}{4}\right)$

$f(-2) = -4 \Rightarrow f(-3) = -4$

$f(-1) = -2 \Rightarrow f(-4) = -2$

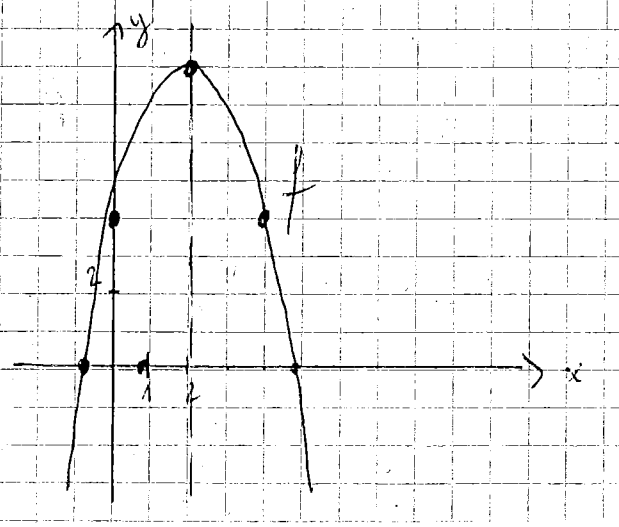


(b) o.o = 4

zéros: $Z_f = \{2 \pm 2\sqrt{2}\} \cong \{0{,}8; 4{,}8\}$

axe: $x = -\frac{b}{2a} = 2$

Sommet: $S = (2; 8)$

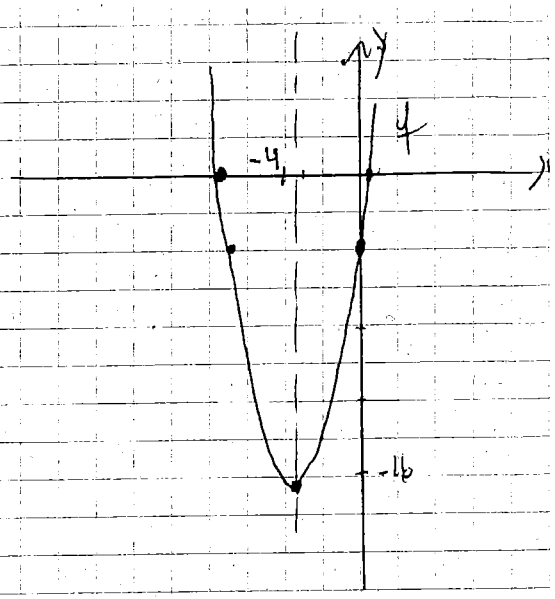


(d) $0.0 = -4$

ex2: $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-7 \pm \sqrt{65}}{2} \right\} \simeq \{-7{,}5 ; 0{,}5\}$

axe: $x = -\frac{7}{2}$

Sommet: $S = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{65}{4}\right)$



(e) $0.0 = -7$

ex2: $\mathcal{S} = \left\{ \frac{9 \pm \sqrt{109}}{2} \right\} \simeq \{-0{,}7 ; 9{,}7\}$

axe: $x = 9/2$

Sommet: $S = \left(\frac{9}{2} ; \frac{-109}{4}\right)$

(f) $0.0. = -6$

ex2: $S = \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4} \right\} \simeq \{-3{,}4 ; 0{,}9\}$

axe: $x = -\frac{5}{4}$

Sommet: $S = \left\{ -\frac{5}{4} ; \frac{-73}{8} \right\}$

ex 4

(a) $x^2 + 5x + 5 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x+2) = 0$

$x = -3$ ou $x = -2$

$S = \{-3 ; -2\}$

(b) $-x^2 + 4x - 1 = -1$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow -(x-3)(x-1) = 0$

$x = 3$ ou $x = 1$

$S = \{1 ; 3\}$

(c) $x^2 + 7x + 5 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x+6)(x+1) = 0$

$x = -6$ ou $x = -1$

$S = \{-6 ; -1\}$

(d) $x^2 - 6x + 7 = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0$

$x = 2$ ou $x = 4$

$S = \{2 ; 4\}$

(e) $-x^2 - 3x + 3 = -1$

$\Leftrightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -(x^2 + 3x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow -(x+4)(x-1) = 0$

$x = -4$ ou $x = 1$

$S = \{-4 ; 1\}$

(f) $2x^2 + 5x - 7 = -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Delta = 25 + 48 = 73$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4}$

$S = \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4} \right\}$

ex5

(a) faux ; contre-ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\quad Zf = \{0\}$

(b) faux ; contre-ex : x^2+1 $\quad \Delta < 0$ non fait

(c) faux ; contre-ex : $a=-1 \Rightarrow x^2+1$ $\quad \Delta<0$ non fait

(d) faux ; contre-ex : $a=0 \Rightarrow x^2=0$ $\quad S=\{0\}$

(e) faux, contre-ex : $b=1 \Rightarrow x^2+x+1$ $\quad \Delta=-3<0$ non fait

(f) faux contre-ex : $b=1 \Rightarrow x^2+x+1=0$ $\quad \Delta<0$ $\quad S=\emptyset$

ex6 $\quad P_3(x) = a(x+4)(x+1)$

$P_3(-2)=-7 \Leftrightarrow -7=a(2)(-1) \Leftrightarrow a=+7/2$

$P_3(x) = 7/2\,(x+4)(x+1$

$P_2(x) = a(x+5)^2+1$

$P_2(-4)=-1,5 \Leftrightarrow -1,5=a(1)+1 \Leftrightarrow a=-2,5$

$P_2(x) = -2,5(x+5)^2+1$

$P_1(x) = a(x+5)(x+3)$

$P_1(-4)=-2 \Leftrightarrow -2=a(1)\cdot(-1) \Leftrightarrow a=2$

$P_1(x) = 2(x+5)(x+3)$

$P_4(x)=a(x+1)^2+2$

$P_4(0)=5 \Leftrightarrow 5=a(1)+2 \Leftrightarrow a=3$

$P_4(x)=3(x+1)^2+2$

$P_5(x)=a(x+2)(x-4)$

$P_5(0)=4 \Leftrightarrow 4=a(2)\cdot(-4) \Leftrightarrow a=-1/2$

$P_5(x)=-1/2\,(x+2)(x-4)$

$P_6(x)=a(x-5)^2+4$

$P_6(4)=3 \Leftrightarrow 3=a(1)+4 \Leftrightarrow a=-1$

$P_6(x)=-(x-5)^2+4$

ex 7

(a) $(x+2)(x+4)=0$

(b) $(x-7)^2=0$

(c) $(x-75)(x+36)=0$

(d) $(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{5})=0$

(e) $7(x-1)^2=0$

(f) $-4x^2+1=0$

ex 8

(1) $(x-3)(x+3)=0$
$S=\{\pm 3\}$

(2) $7t(5t+1)=0$
$S=\{-\frac{1}{5};0\}$

(3) $(x-9)(x+9)=0$
$S=\{\pm 9\}$

(4) $\Delta<0$ $S=\emptyset$

(5) $(11x-5)(11x+5)=0$
$S=\{\pm\frac{5}{11}\}$

(6) $(\frac{3}{2}-t)(\frac{3}{2}+t)=0$
$S=\{\pm\frac{3}{2}\}$

(7) $(\frac{1}{5}-\frac{2}{4})(\frac{1}{5}+\frac{2}{4})=0$
$S=\{\pm\frac{4}{5}\}$

(8) $6u(2u-1)=0$
$S=\{0;\frac{1}{2}\}$

(9) $(x-7)(x+3)=0$
$S=\{-3;7\}$

(10) $(t+1)(t-13)=0$
$S=\{-1;13\}$

(11) $(x-4)(x+5)=0$
$S=\{-5;4\}$

(12) $6(x^2-2x+1)=0$
$\Leftrightarrow 6(x-1)^2=0$
$S=\{1\}$

(13) $3(4y^2-4y+1)=0$
$\Leftrightarrow 3(2y-1)^2$
$S=\{1/2\}$

(14) $5(3t^2-6t+1)=0$
$\Leftrightarrow 5(3t-1)^2=0$
$S=\{\frac{1}{3}\}$

(15) $\Delta<0$
$S=\emptyset$

(16) $\Delta<0$
$S=\emptyset$

(17) $S=\{\frac{4}{3};-1\}$

(18) $S=\{-2;-2/3\}$

(20) $S=\{-2;1\}$

(19) $S=\{-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\}$

(21) $x^2+8x+9+2x+7=0$
$\Leftrightarrow x^2+8x+16=0$
$\Leftrightarrow (x+4)^2=0$
$S=\{-4\}$

(22) $x^2+8x+16+2x+9=0$
$\Leftrightarrow x^2+10x+25=0$
$\Leftrightarrow (x+5)^2=0$
$S=\{-5\}$

(23) $x^2+10x+25+2x+11=0$
$\Leftrightarrow x^2+12x+36=0$
$\Leftrightarrow (x+6)^2=0$
$S=\{-6\}$

(24) $x^2+4x+4+8x+32=0$
$\Leftrightarrow x^2+12x+36=0$
$\Leftrightarrow (x+6)^2=0$
$S=\{-6\}$

Ex. 10 Parmi tous les rectangles ayant un périmètre égale à 24 centimètres, quelles sont les dimensions de ceux qui ont une aire maximale ?

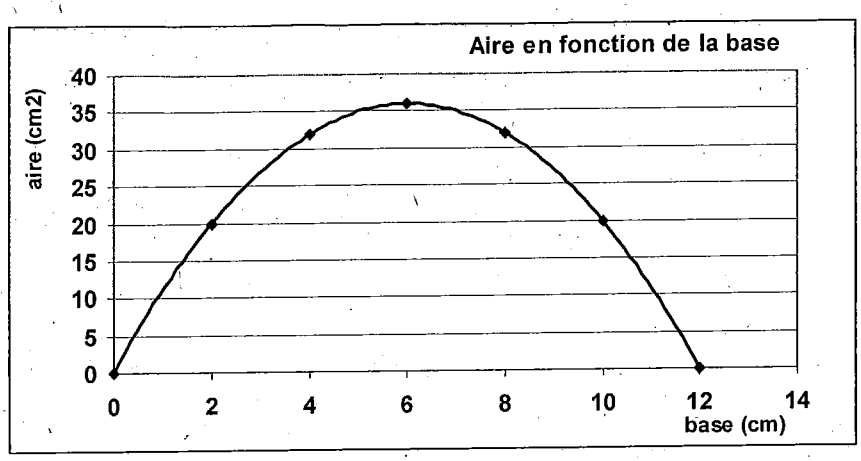
On appelle x la base du rectangle ; y la hauteur du rectangle

périmètre = 24 cm → 2(x+y) = 24 → x+y = 12 → y = 12 – x

aire A(x) = x·y = x·(12 – x) = $-x^2 + 12x$: fonction parabolique (a= -1 ; b=12 ; c=0) concave qui atteint son maximum (sommet de la parabole) en x = -b/2a = 6 cm

Le rectangle d'aire maximale a comme base x=6 cm et son hauteur est y = 12-x = 6 cm

Il s'agit donc en fait d'un carré 6x6, d'aire A = 36 cm^2



Ex. 15 On appelle N le nombre d'appareils achetés et p le prix normal par appareil sans réduction.

$N \cdot p = 21'600 \quad [1] \Rightarrow p = \dfrac{21600}{N} \quad [4]$

$(N+30)\cdot(p-20) = 21'600 + 2400 \quad [2] \Rightarrow N \cdot p + 30p - 20N - 600 = 21'600 + 2400 \quad [3]$

On met les équations [1] et [4] dans l'équation [3] :

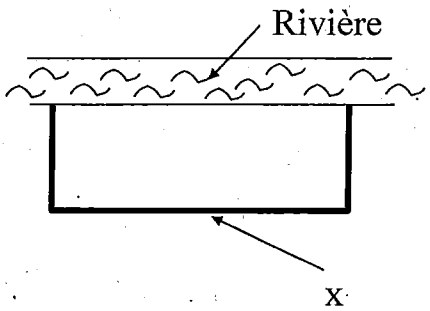
$$\Rightarrow 21'600 + \frac{30 \cdot 21'600}{N} - 20N - 600 = 21'600 + 2400 \Rightarrow \frac{30 \cdot 21'600}{N} - 20N - 600 = 2400 \Rightarrow$$

$$\frac{648'000}{N} - 20N = 3000 \Rightarrow -20N^2 - 3000N + 648000 = 0 \Rightarrow N^2 + 150N - 32'400 = 0 \Rightarrow$$

$\Delta = 150^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32'400 = 152'100 = 390^2 \Rightarrow N = \dfrac{-150 \pm 390}{2} = 120$ (on écarte la solution négative).

Le prix sans réduction était donc p = 21'600/120 = 180 chf

Ex. 41 On appelle x la base du rectangle et y son hauteur.
Puisque la longueur de la barrière est 120 m, on a



x + 2y = 120 donc : $y = \dfrac{120 - x}{2}$

L'aire (base x hauteur est donc : $A(x) = x \cdot y = x\dfrac{120 - x}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 + 60x$

A(x) est une fonction parabolique concave (a= -1/2 ; b=60 ; c=0) de x qui atteint son maximum quand x = -b/2a = 60 m.

$x = 60 \Rightarrow y = \dfrac{120 - 60}{2} = 30$, donc l'aire maximale est $A_{\max} = x \cdot y = 60 \cdot 30 = 1800\ m^2$

Ex. 43 Lorsqu'on lance un objet en l'air depuis une hauteur de 1,5 mètres, avec une vitesse initiale de 6 m/s, sa hauteur en fonction du temps est :

h(t) = $-4{,}9\ t^2 + 6\ t + 1{,}5$ (avec t en s ; h en m).

a) h(0) = 1,5 m. Après combien de temps l'objet se retrouve-t-il à une hauteur de 1,5 m ?

h(t) = 1,5 → $-4{,}9\ t^2 + 6\ t + 1{,}5 = 1{,}5$ → $-4{,}9\ t^2 + 6\ t = 0$ → $t\,(-4{,}9\ t + 6) = 0$ →

t=0 ou t=-6/(-4,9) ≈ 1,22 s

b) A quels instants l'objet se trouve-t-il à une hauteur de 3,2 mètres ?

h(t) = 3,2 → $-4{,}9\ t^2 + 6\ t + 1{,}5 = 3{,}2$ → $-4{,}9\ t^2 + 6\ t - 1{,}7 = 0$ → $4{,}9\ t^2 - 6\ t + 1{,}7 = 0$

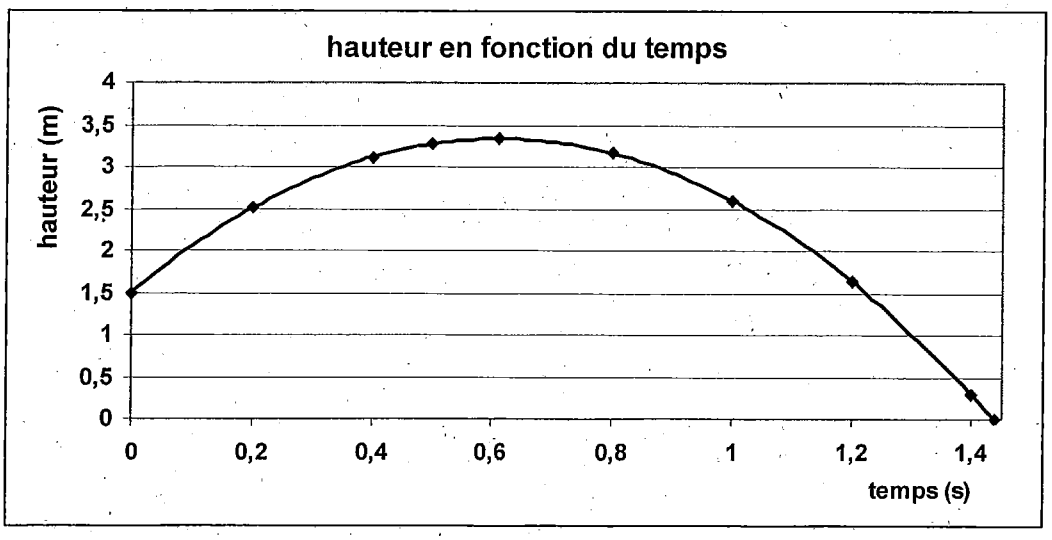
→ $49\ t^2 - 60\ t + 17 = 0$ → $\Delta = 60^2 - 4 \cdot 17 \cdot 49 = 268 = 4 \cdot 67$

$t = \dfrac{60 \pm 2\sqrt{67}}{98} \Rightarrow t_1 = 0{,}779\ s \quad t_2 = 0{,}445\ s$

c) h(t) est une fonction parabolique concave de t : h(t) = $-4{,}9\ t^2 + 6\ t + 1{,}5$
qui atteint son maximum quand :

$t = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2(-4{,}9)} = -\dfrac{3}{4{,}9} \approx 0{,}612\ s$

L'hauteur maximale est : $h_{\max} = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{6^2 - 4(-4{,}9) \cdot 1{,}5}{4(-4{,}9)} = \dfrac{36 + 29{,}4}{19{,}6} \approx 3{,}34\ m$



Ex.12 Déterminer un nombre N de deux chiffres tel que la somme des deux chiffres soit 12 et le produit de N par le nombre N' obtenu en inversant l'ordre des chiffres soit 4 275.

N = 10d + u (u chiffre des unités entre 0 et 9 ; d chiffre des dizaines entre 1 et 9)

Système de deux équations :
u + d = 12
(10d + u)(10u + d) = 4275

On obtient à partir de la première équation : d = 12 –u. On remplace dans la deuxième :

$$[10(12-u)+u][10u+(12-u)] = 4275 \Rightarrow (120-9u)(9u+12) = 4275 \Rightarrow -81u^2+972u-2835 = 0$$

$$\Rightarrow 81u^2-972u+2835 = 0 \Rightarrow \Delta = 972^2-4\cdot 81\cdot 2835 = 26244 = 162^2 \Rightarrow u = \frac{972\pm 162}{162} = 5 \text{ ou } 7$$

Deux solutions : u=5 ; d=7 → N = 75 et u=7 ; d=5 → N=57

Ex.14 a) vitesse du bateau **par rapport à la rive** à l'aller puis au retour.

Aller : V_a = v + 5 km/h Retour : V_r = v – 5 km/h

b) durée du trajet à l'aller puis au retour.

vitesse = distance/temps → temps = distance/vitesse $t_a = \frac{75}{v+5}$ $t_r = \frac{75}{v-5}$

c) vitesse propre du bateau

temps total : $t = t_a + t_r = \frac{75}{v+5} + \frac{75}{v-5} = \frac{75(v-5)+75(v+5)}{(v+5)(v-5)} = \frac{150v}{v^2-25} = 8\,heures \Rightarrow$

$$8(v^2-25) = 150v \Rightarrow 8v^2-150v-200 = 0 \Rightarrow 4v^2-75v-100 = 0 \Rightarrow \Delta = 75^2+4\cdot 4\cdot 100 = 7225 = 85^2 \Rightarrow$$

$v = \frac{75\pm 85}{8} = 20\ km/h$ (on écarte la solution négative qui n'a pas de sens)

ex 16

(a) $3x=0$ ou $(3x+6)=0$ ou $x+3=0$

$x=0$ $\quad x=-2$ $\quad x=-3$

$S=\{-3;-2;0\}$

(b) $3x=0$ ou $(3x+1)^2=0$ ou $(x+3)=0$

$x=0$ $\quad x=-2$ $\quad x=-3$

$S=\{-3;-2;0\}$

(c) $(x^2+1)=0$ ou $x^2+2x+3=0$

$\emptyset$ $\quad (x+3)(x+1)=0$

$x=-3$ ou $x=-1$

$S=\{-3;-1\}$

(d) $x=0$ ou $x=1$ ou $x=2$ ou $x=3$ ou $x=4$ ou $x=5$ ou $x=6$

$S=\{0;1;2;3;4;5;6\}$

(e) $(1-x^2)\cdot x-2(x^2-x)+x(x^2-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)x-2x(x-1)+x(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow -[x-1](1+x)x-2x(x-1)+x(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot x\cdot[-(1+x)-2+(x-1)]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot x[-1-\cancel{x}-2+\cancel{x}-1]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot x[-4]=0$

$S=\{0;1\}$

(f) $x^{35}=0$ ou $3-x^2=0$ ou $7+2x^2=0$ ou $x-\sqrt{3}=0$ ou $2-3x=0$

$x=0$ $\quad x=\pm\sqrt{3}$ $\quad S=\emptyset$ $\quad x=\sqrt{3}$ $\quad x=2/3$

$S=\{-\sqrt{3};0;\frac{2}{3};\sqrt{3}\}$