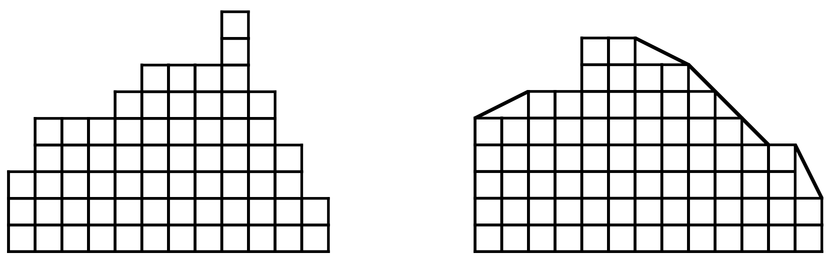
L'aire: une notion plus riche qu'il n'y paraît

André Boileau et Maurice Garançon, UQAM
(boileau.andre@uqam.ca et garanson@math.uqam.ca)

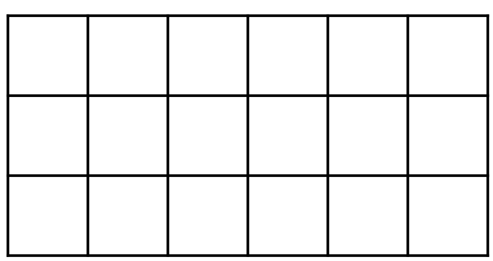
Introduction

En mathématiques, on rencontre souvent des concepts qui nous semblent très simples au premier abord, mais qui nous réservent des surprises. Dans ce qui suit, nous examinerons le cas de l'aire de surfaces planes.

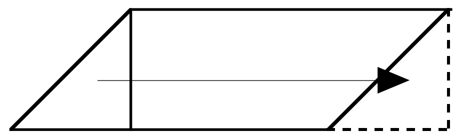
Essayons de nous rappeler les divers contacts avec le concept d'aire qui sont proposés au fil de la scolarité, en insistant surtout sur l'ordre secondaire. Au primaire et au début du secondaire, on rencontre l'aire comme une activité de pavage et de dénombrement. Voici une activité typique illustrant cette approche: on nous donne une figure déjà quadrillée et on nous demande de trouver son aire. Il est entendu (implicitement ou explicitement) que les petits carrés formant le quadrillage serviront d'unité de mesure, et que le calcul de l'aire reviendra à compter ces petits carrés. Dans certains cas, il pourra être nécessaire de regrouper des portions de carrés afin de pouvoir plus facilement les dénombrer.



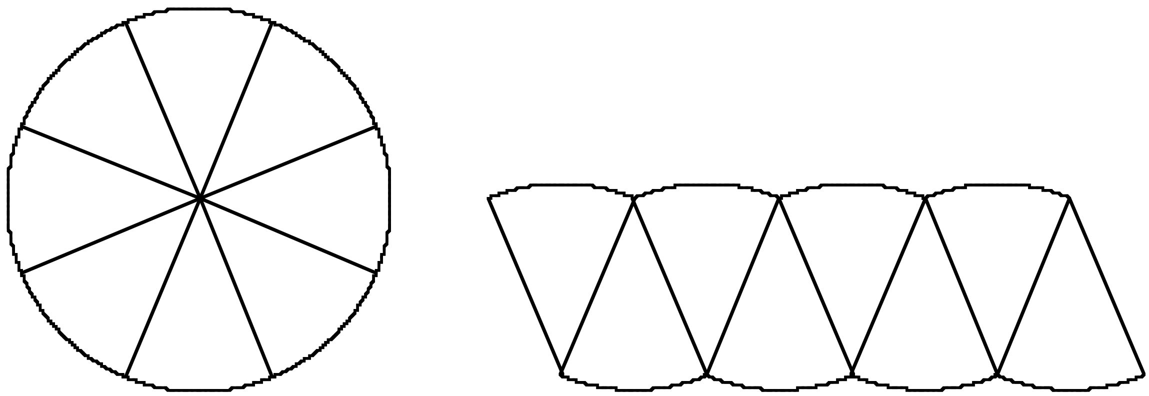
Mais très vite, l'aire devient une question de formules. En général, on débute par le rectangle et la formule (aire = base × hauteur) est justifiée en pavant le rectangle avec des petits carrés que l'on dénombre ensuite (voir figure). En somme, cette façon de faire est dans le prolongement de l'expérience antérieure des élèves concernant l'aire.



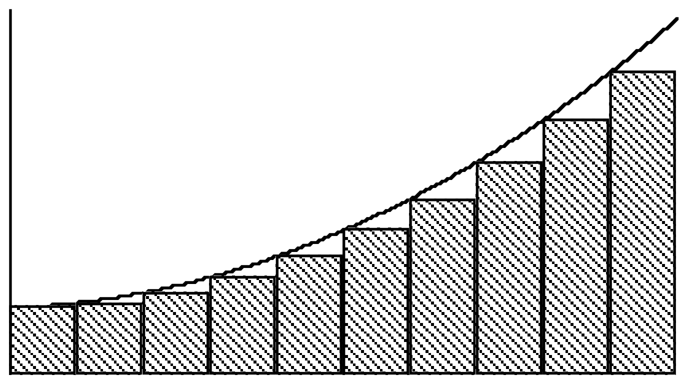
Ensuite on établit les formules d'aires de divers polygones (parallélogrammes, triangles, etc.) en changeant complètement de méthode: on oublie pavages et dénombrement de carrés unités pour passer aux découpages et recollements (qui sont aujourd'hui décrits dans le vocabulaire de la géométrie des transformations). Par exemple, pour établir la formule d'aire du parallélogramme, on propose souvent à l'élève la figure suivante, qui suggère (implicitement ou explicitement) qu'on peut découper un morceau triangulaire du parallélogramme pour le recoller ailleurs, de façon à former un rectangle de même aire.



Plus tard au secondaire, on devra raffiner notre méthode quand viendra le temps de parler de l'aire du disque. On commencera par découper le disque en un nombre (variable) de secteurs, qu'on rassemblera pour former une figure ressemblant à un rectangle. Puis, par un argument de passage à la limite (plus ou moins explicité), on obtiendra la formule désirée.



Enfin, si l'élève vient à suivre des cours de calcul différentiel et intégral au niveau collégial, il rencontrera la définition de l'intégrale (de Riemann), qui met en jeu non plus des pavages mais des approximations par des rectangles dont la base devient de plus en plus petite, et qui nécessite un passage à la limite.



Il sera aussi confronté à des aires négatives, bien qu'en général on n'insistera pas trop sur le sujet. Et si jamais notre élève devient mathématicien, il verra à l'université qu'il y a en fait plusieurs sortes d'intégrales, et fera connaissance avec une théorie générale de la mesure.

Notons qu'en général, une fois les formules d'aire établies, on ne retournera à peu près jamais aux définitions et méthodes qui ont permis de les obtenir. Les contacts avec le concept d'aire seront alors limités à l'application de ces formules: on aura réduit l'aire à l'algèbre.

Dans ce qui suit, nous allons chercher à réfléchir plus longuement sur l'établissement des formules d'aire pour le rectangle, le parallélogramme et le cercle. Vous serez peut-être surpris des richesses que nous allons rencontrer à cette occasion.

Le cas du rectangle

Reconsidérons le rectangle précédent, dont la base mesure 6 unités et la hauteur 3 unités. Imaginons une première démarche visant à compter les carrés le pavant sans tenir compte de leur structuration en rangées et en colonnes, par exemple dans l'ordre suggéré par la numérotation de la figure suivante.

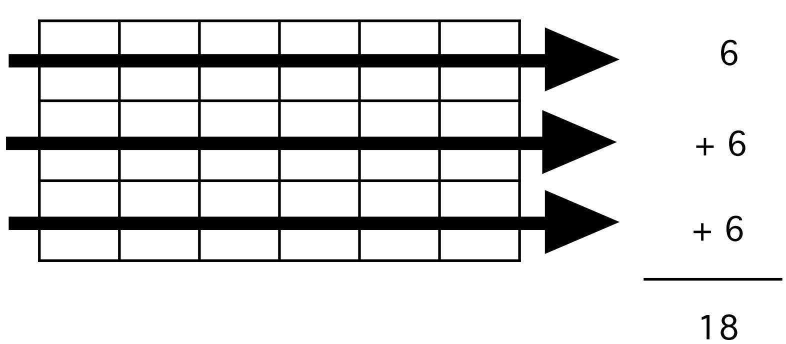
1	2	3	4	5	6
14	15	16	17	18	7
13	12	11	10	9	8

Après avoir étudié d'autres cas particuliers de semblable façon et reporté nos résultats dans un tableau comme suit, on peut remarquer une régularité arithmétique: le nombre total de carrés nécessaires pour paver le rectangle est toujours le produit des mesures de la base et de la hauteur.

Nombre de rangées	Nombre de colonnes	Nombre total de carrés
3	6	18
2	7	14
5	4	20
6	8	48
9	3	27

Au terme d'une telle démarche, on peut dire d'une part qu'on a de bonnes raisons de croire en la régularité qui a été découverte, mais d'autre part qu'on ne sait pas expliquer cette régularité.

Imaginons maintenant une deuxième démarche où l'on étudie divers cas particuliers et dénombre les carrés en tenant compte de leur structuration en rangées et en colonnes, comme dans la figure suivante.



Le nombre total de carré (soit 18) est obtenu en additionnant de façon répétés de nombre de carrés dans chaque rangée (6+6+6) ou encore, puisque qu'une telle addition répétée est en fait une multiplication, en multipliant le nombre de rangées par le nombre de carrés dans chaque rangée (3×6).

Avec des élèves, on peut étudier de la sorte plusieurs cas particuliers. Il est bien important de noter que, même si on ne travaille que sur des cas particuliers, le raisonnement utilisé se généralise facilement. On peut le constater en remarquant que les élèves s'en lassent assez vite, puisqu'ils ont l'impression d'une répétition où rien de nouveau n'est ajouté. Le professeur peut aussi vérifier la généralité du raisonnement impliqué en donnant des rectangles de grandes dimensions (comme 347 sur 218), où un dénombrement devient impossible en pratique mais où on peut continuer d'appliquer notre raisonnement.

Nous constatons ici que cette deuxième démarche nous permet tout comme la première d'affirmer avec une grande confiance que l'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant sa base par sa hauteur. Mais, contrairement à la première démarche, elle mène à une compréhension du phénomène: nous pouvons expliquer pourquoi le résultat obtenu est vrai. N'est-ce pas là ce que tout enseignement des mathématiques devrait viser?

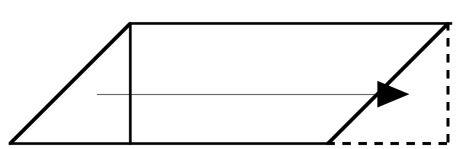
Il est bien important de souligner que, dans les deux démarches ci-dessus, il n'a jamais été question de rectangles dont les côtés ne se mesurent pas par des entiers. En d'autres mots, la formule *aire = base × hauteur* n'a été établie (et comprise) que dans les cas où les nombres *base* et *hauteur* sont des entiers naturels. Cette formule reste-t-elle valide lorsque les nombre impliqués sont rationnels ou même réels? C'est ce qu'affirment tous les manuels, mais il faut constater qu'ils ne fournissent habituellement pas d'explications ou même de vérifications expérimentales pour étayer ceci.

On semble donc passer ici d'une mathématique expérimentale (première démarche) ou déductive (deuxième démarche) à une mathématique dogmatique ("crois ce que j'affirme"). À priori, ceci ne semble pas souhaitable. Mais peut-être est-ce inévitable? En effet, il pourrait arriver que les expérimentations et les explications nécessaires soient trop difficiles pour être accessibles aux élèves de ces niveaux. Est-ce le cas ici? Nous y reviendrons.

Le cas du parallélogramme

Après avoir établi la formule de l'aire du rectangle par pavage, on traite en général les triangle, parallélogramme, losange et trapèze avec d'autres méthodes, en général assez semblables entre elles. A titre d'exemple représentatif nous allons étudier le cas du parallélogramme.

Regardons d'abord ce qu'on trouve dans certains manuels, la figure suivante en est une illustration.

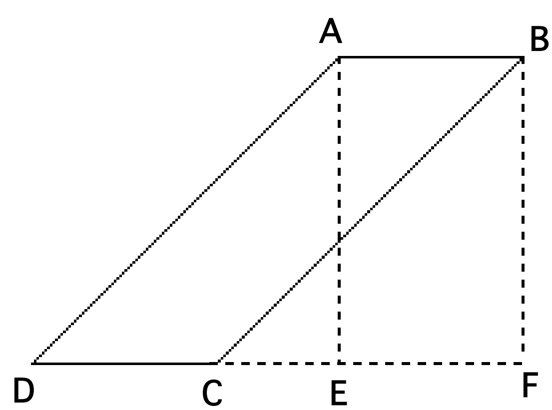


Notons d'abord que la plupart du temps une telle figure n'est accompagnée d'aucune explication, ce qui sous-entend que le professeur (ou peut-être l'élève?) a toute la responsabilité pour construire l'explication. Jouons le jeu et tentons une explication : on découpe un morceau du parallélogramme (un triangle), on le déplace par translation et on le recolle ailleurs pour obtenir un rectangle de même base, hauteur et aire que le parallélogramme initial.

Examinons toutes ces affirmations :

1- Le parallélogramme et le rectangle ont la même aire:
on utilise ici des propriétés générales des aires qui sont sous entendues, l'additivité (l'aire d'une figure est la somme des aires des morceaux qui la composent), l'invariance sous déplacement (deux figures isométriques ont même aire), ou a tout le moins dans ce cas-ci l'invariance par translation.
On utilise donc une axiomatique intuitive et implicite. Faut-il l'expliciter? Nous pensons que oui: si nous voulons développer chez les élèves l'habitude et l'habileté à expliquer il faut leur donner des modèles cohérents. Il faut rendre clair que nos explications sont basées sur quelque chose, des principes de base, des axiomes. Il n'est par contre pas nécessaire de formaliser les axiomes: s'ils correspondent à l'intuition, tant mieux, gardons les intuitifs!

2- On obtient un rectangle de même base et de même hauteur:
avant de dire que c'est évident et que ça ne nécessite aucune explication, regardons le cas de figure suivant (remarquons que pour parler de la figure, l'expliquer, il devient nécessaire de nommer les choses):



la hauteur AE ne tombe pas sur la base CD et le triangle AED n'est pas intérieur au parallélogramme, il ne constitue pas un morceau du parallélogramme et ne peut être découpé. Toute l'explication parait s'écrouler, elle était basée sur un cas particulier de figure et n'est pas immédiatement généralisable.

Analysons le phénomène et décrivons-le avec précision:
ABCD est un parallélogramme. Du sommet A abaissons une perpendiculaire sur CD. le pied E de cette perpendiculaire peut-être ou ne pas être à l'intérieur de la base AB, c'est ce qui nous a piégés. Du sommet B abaissons la perpendiculaire BF sur AB. Le triangle ADE peut, par translation, être amené sur le triangle BCF, ils ont donc la même aire.

Considérons maintenant le quadrilatère ABFD et exprimons son aire de deux façons (en utilisant l'additivité)

Aire(ABFD) = Aire(ADE) + Aire(ABFE) et
Aire(ABFD) = Aire(ABCD) + Aire(BCF).

Puisque les deux triangles ADE et BCF ont la même aire, on obtient en simplifiant, Aire(ABFE) = Aire(ABCD). Le parallélogramme ABCD a la même aire que le rectangle ABFE de même base (DC=AB=EF) et même hauteur AE.

Notons d'une part l'intérêt de faire une description précise pour mettre à jour les erreurs et faire penser à des explications, et d'autre part qu'on a utilisé exactement les mêmes propriétés d'additivité et d'invariance par translation.

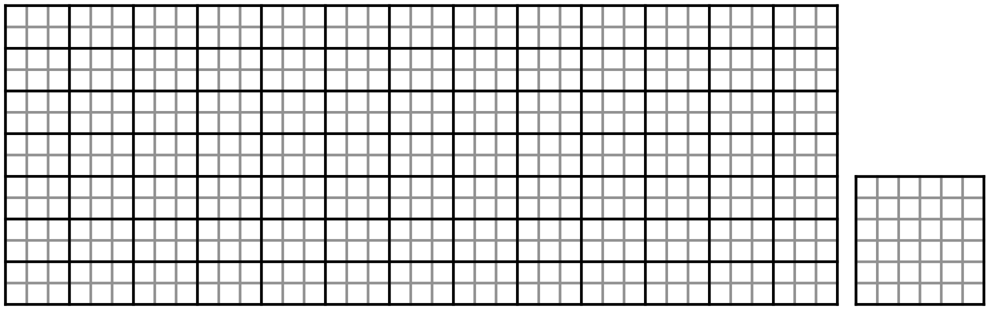
Peut-on se satisfaire de la première version, plus simple mais limitée à un cas particulier? Pourquoi pas? Mais alors en illustrant que c'est un cas particulier et en incitant les élèves a réfléchir sur le cas général. Comment pourrait-on soutenir que les mathématiques forment l'esprit si nous basons nos explications sur des cas particuliers et espérons que les élèves ne se posent pas trop de questions?

Le rectangle revisité

Nous avons vu plus tôt comment on établit, par pavage, la formule de l'aire du rectangle lorsque les côtés ont des mesures entières. Cette formule reste-elle vraie lorsque les côtés ont des mesures rationnelles ou réelles?

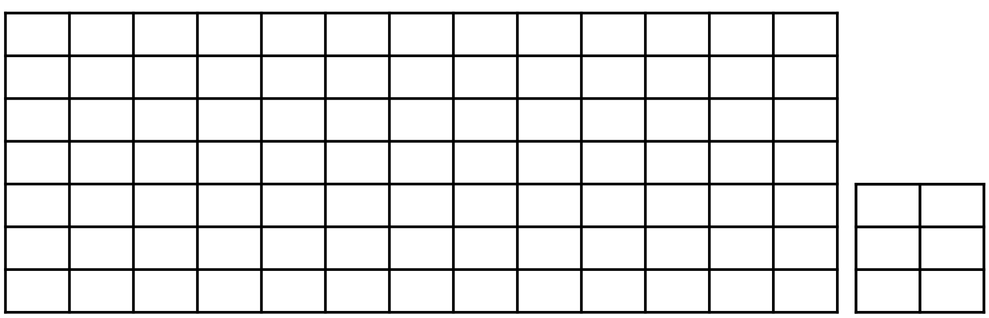
Dans les manuels après avoir établi la formule pour les entiers on l'utilise dans tous les cas, sans se poser de question. Pourquoi n'explique-t-on jamais qu'elle est valable dans tous les cas? Est-ce trop difficile? Pas nécessairement dans le cas rationnel. Dans ce dernier cas, illustrons comment on peut l'expliquer à des élèves ayant une connaissance raisonnable des fractions. Nous procèderons encore par un raisonnement général sur des cas particuliers.

Considérons un rectangle de côtés $\frac{13}{2}$ par $\frac{7}{3}$. Pour le paver il faut trouver un carré dont le côté entre un nombre entier de fois dans $\frac{13}{2}$ et dans $\frac{7}{3}$. Le carré de côté $\frac{1}{6}$ fait l'affaire puisque $\frac{13}{2} = \frac{39}{6}$ et $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$. D'autre part il faut compter combien il y a de ces carrés dans notre rectangle initial.



Les relations $\frac{13}{2} = \frac{39}{6}$ et $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$ permettent de déduire qu'on pourra en placer 39 le long du côté de $\frac{13}{2}$ et 14 le long du côté de $\frac{7}{3}$. En utilisant la méthode de comptage déjà utilisée dans le cas entier on trouve qu'il y en aura en tout 39×14 dans le rectangle. Il faut maintenant connaître l'aire de chacun de ces petits carrés. Mais on peut aussi paver le carré unité avec 6×6 de ces carrés, on en déduit que leur aire est $\frac{1}{6 \times 6}$ (encore une fois additivité et invariance par isométrie). Comme chacun a une aire égale à $\frac{1}{6 \times 6}$, l'aire du rectangle sera de $\frac{39 \times 14}{6 \times 6} = \frac{39}{6} \times \frac{14}{6} = \frac{13}{2} \times \frac{7}{3}$. C'est bien de produit des longueurs des côtés.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de paver avec des carrés de côté $\frac{1}{6}$. On pourrait tout aussi bien paver avec des rectangles de côtés $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{3}$ et faire un raisonnement analogue.

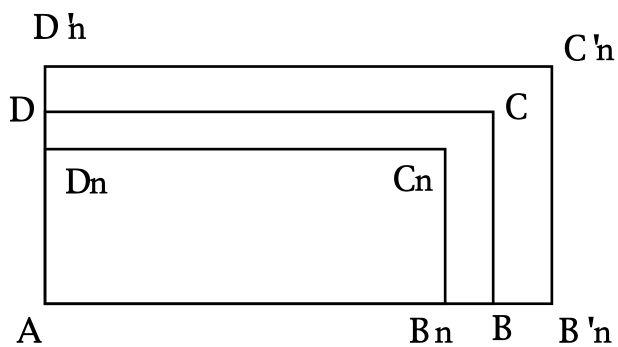


Il faut six de ces rectangles pour paver le carré unité, donc l'aire de chacun est $\frac{1}{6}$. (On peut remarquer que c'est le produit des côtés $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{3}$, mais qu'on ne l'a pas obtenu de cette façon.) Dans le rectangle initial on peut en placer 13 le long du côté de $\frac{13}{2}$ et 7 le long du côté de $\frac{7}{3}$, donc au total il en faut 13×7 pour paver le rectangle. Comme chacun a une aire de $\frac{1}{6}$, l'aire du rectangle est $\frac{13 \times 7}{6} = \frac{13 \times 7}{2 \times 3} = \frac{13}{2} \times \frac{7}{3}$.

Nous avons raisonné sur un cas particulier mais le raisonnement est-il général? Voyons si on peut le répéter facilement sur un cas général (pour des élèves initiés à l'algèbre).

Considérons un rectangle dont les mesures sont $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ où a, b, c et d sont des entiers positifs. On va paver ce rectangle avec des rectangles de côtés $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{d}$. En plaçant les côtés de longueur $\frac{1}{d}$ des "petits" rectangles parallèlement au côté de longueur $\frac{a}{b}$ du rectangle initial (et donc le côté de longueur $\frac{1}{d}$ parallèlement à celui de longueur $\frac{c}{d}$) on pourra en placer a le long du côté de longueur $\frac{a}{b}$ et c le long du côté de longueur $\frac{c}{d}$. Il en faudra donc $a \times c$ pour paver le rectangle. Le même raisonnement montre qu'il en faut $b \times d$ pour paver le carré unité, et donc leur aire est $\frac{1}{b \times d}$. Finalement l'aire du rectangle est $\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ qui est bien le produit des côtés.

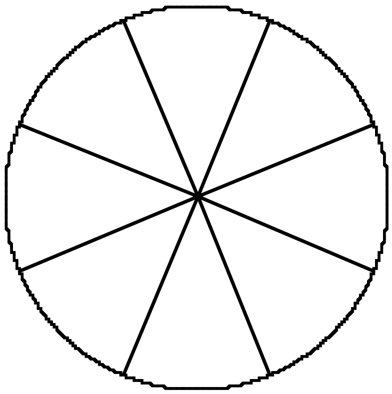
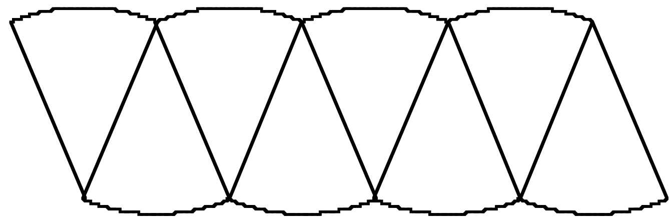
Comme nous l'avons dit plus haut le cas réel semble trop difficile pour être abordé au secondaire. Il nécessite une bonne connaissance des nombres réels, le concept de limite et certaines de ses propriétés, notions qui ne sont abordées qu'au CEGEP. Avec ces connaissances on peut, par exemple, dire que si un rectangle ABCD a des côtés la longueur AB=x et BC=y réelles alors il existe des suites croissantes (x_n) et (y_n) de limites x et y, et il existe des suites décroissantes (u_n) et (v_n) aussi de limites x et y (propriétés des réels). Les rectangles $AB_nC_nD_n$ de côtés x_n et y_n ont x_ny_n pour aires et sont tous contenus dans le rectangle ABCD; et les rectangles $AB'_nC'_nD'_n$ de côtés u_n et v_n ont u_nv_n pour aires et contienent tous le rectangle ABCD.



On a donc $x_ny_n \leq$ Aire(ABCD) $\leq u_nv_n$ et en passant à la limite on obtient (en utilisant le fait que la limite d'un produit est égale au produit des limites lorsque celles-ci existent):
xy ≤ Aire(ABCD) ≤ xy , d'où Aire(ABCD)=xy.

Le cas du cercle

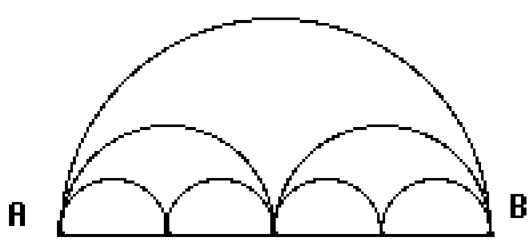
Pour le cercle on trouve souvent l'argument suivant :

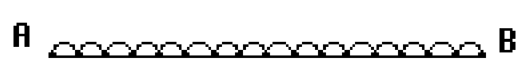
On divise le cercle de rayon r, en un certain nombre de secteurs, puis on réarrange ces secteurs, comme sur la figure, pour obtenir une figure F, sorte de "parallélogramme festonné" (dans les cas où il y a un nombre pair de secteurs), de même aire que le cercle. Les côtés composés d'arcs de cercles ont πr pour longueur (un demi-périmètre) et les côtés rectilignes ont r pour longueur (ce sont des rayons). Lorsque le nombre de secteurs augmente indéfiniment, dans la figure F *les côtés composés d'arcs de cercles tendent vers des segments de longueur πr*. La figure F tend donc vers un rectangle de côtés r et πr, donc d'aire πr^2. On conclut que F et le rectangle limite ont la même aire et puisque F et le cercle ont la même aire, que l'aire du cercle est πr^2.
Cet argument semble convainquant, même s'il est basé sur un argument un peu flou de passage à la limite. Les courbes composées d'arcs de cercles ont toutes la même longueur, indépendamment du nombre d'arcs de cercles, et donc le segment limite a la même longueur.

Pour semer un peu le doute, considérons un exemple apparenté auquel nous allons appliquer un raisonnement semblable. En partant d'un segment AB de longueur 2, construisons sur ce segment une suite de courbes de la façon suivante :

La première courbe C_1 est un demi-cercle de rayon 1 et de diamètre AB, donc de longueur π. La seconde courbe C_2 est composée de 2 demi-cercles de rayon 1/2, donc sa longueur est $2\times\pi\times1/2=\pi$. La troisième courbe C_3 est composée de $4=2^2$ demi-cercles de rayon 1/4 donc sa longueur est $4\times\pi\times1/4=\pi$. La n-ième courbe sera composée de 2^{n-1} demi-cercles de rayon $1/2^{n-1}$, donc sa longueur est $2^{n-1}\times\pi\times1/2^{n-1}=\pi$, etc.



C_1, C_2 et C_3



C_5

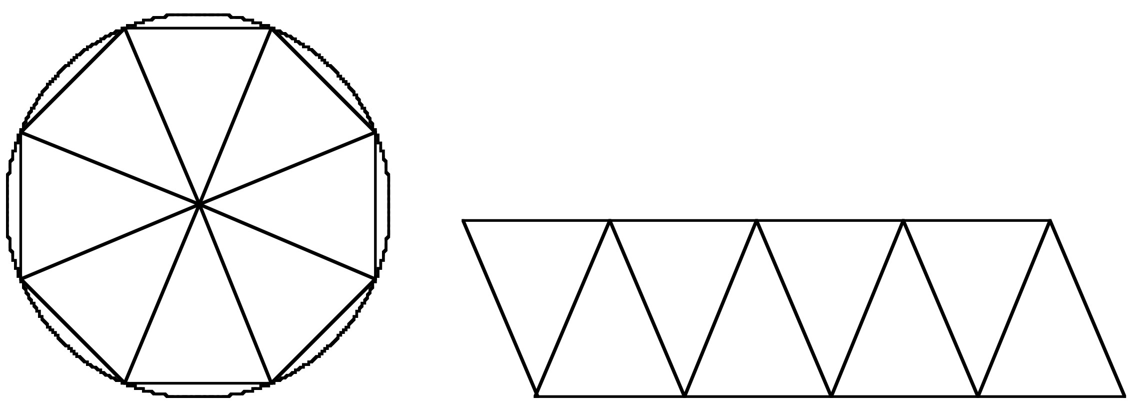
Nous construisons ainsi une suite infinie de courbes toutes de longueur π. Le même raisonnement que plus haut nous conduit à dire : *ces courbes tendent vers le segment AB qui a donc pour longueur π.* Comme on connaît la longueur de AB qui est 2 ont devrait donc conclure que $2=\pi$.

Pourquoi sommes nous portés à rejeter l'argument dans le second cas et à l'accepter dans le premier? Est-ce parce que nous savons d'avance que le résultat auquel il mène est vrai dans le premier cas et faux dans le second? N'est-il pas dangereux d'utiliser devant les élèves un argument qui ne fonctionne pas toujours sans que l'on puisse dire pourquoi?
Peut-on trouver un argument alternatif dont-on est sûr qu'il soit correct?

En fait, à notre connaissance, il n'y a pas d'argument simple qui nous permette de montrer de façon élémentaire que le premier argument est "réparable" tandis que le second ne l'est pas[1]. (Si vous connaissiez un tel argument, nous serions très intéressés à en entendre parler.)

On est donc ici face à la situation suivante: on dispose dans le premier cas d'une explication qui semble nous donner une intuition intéressante de la situation, mais qui d'un autre côté n'est pas entièrement satisfaisante. Que doit-on faire: l'utiliser quand même sans indiquer ses limitations; s'en servir tout en soulignant ses faiblesses; ou la bannir complètement?

Il n'est pas facile de répondre à une telle question. Le plus simple serait de remplacer notre "explication problématique" par une autre qui l'est moins. Dans la cas présent, il est facile de faire appel à une argumentation moins problématique, basée sur une approximation par des triangles plutôt que par des secteurs.



[1] En fait, on doit se rappeler que la longueur des courbes est définie à l'aide d'approximations via des lignes brisées composées uniquement de segments de droite, ce qui n'est pas le cas des deux procédés ci-dessus. Une étude plus poussée nous montre que si on veut approximer la longueur d'une courbe C par les longueurs d'une suite de courbes C_n , il faut non seulement que les courbes C_n tendent vers la courbe C point par point, mais aussi que les suites des tangentes des courbes C_n en un point tendent "presque toujours" vers la tangente correspondante de la courbe C.

À première vue, il peut sembler que ça ne règle en rien notre problème, mais détrompez-vous. Le point crucial ici est que le fait que la suite des périmètres des polygones réguliers inscrits tend vers la longueur de la circonférence du cercle: or ceci découle de la définition même de la longueur d'une courbe en général, et du cercle en particulier. Pour ce qui est du reste de l'argument, il est semblable à ce qu'on faisait avec les secteurs: il utilise encore le concept délicat de limite, mais de façon non problématique.

On peut aussi procéder de façon différente. En se centrant sur la figure de gauche, on remarque que l'aire du polygone régulier inscrit est le produit du périmètre dudit polygone par l'apothème, et on peut passer à la limite: les périmètres des polygones vont tendre vers la longueur de la circonférence, tandis que l'apotème tendra vers le rayon.

En conclusion

On vient de voir que le concept d'aire, même s'il est habituellement considéré comme très simple, peut encore réserver bien des surprises et être l'objet de discussions intéressantes.

Ce faisant, nous avons souligné qu'il est possible de concevoir des démarches alternatives aux habituelles preuves symboliques, qui semblent si abstraites et indigestes à la plupart des élèves.

Par exemple, nous avons vu qu'il est possible de donner sur des cas particuliers une argumentation qui possède une bonne dose de généralité dans le sens suivant: sans nécessairement être capable d'en donner une formulation générale dans un langage algébrique, l'élève devient capable d'adapter ladite argumentation à tous les cas particuliers qu'on lui présente.

Dans d'autres cas, il peut s'avérer trop difficile d'apporter une argumentation convaincante à l'appui de tel ou tel résultat. Le plus simple à ce moment est d'admettre carrément qu'on ne peut donner une explication complète du phénomène. Et si on tient malgré tout à donner des explications partielles, il faut en souligner à la fois l'intérêt et les insuffisances. Car, comme le dit si bien un vieux proverbe chinois, "le véritable savant est celui qui sait tout ce qu'il ignore".

De telles "argumentations générales sur des cas particuliers", "discussions sur les limites de nos explications", ou autres activités de même nature peuvent être pratiquées très tôt dans l'enseignement des mathématiques et poursuivies tout au long de cet enseignement, contribuant ainsi au développement d'habitudes de précision, de discussion critique, et de raisonnement.