Math 2A 2011-12 Corrigé de la semestrielle n°1 — total 80 pts

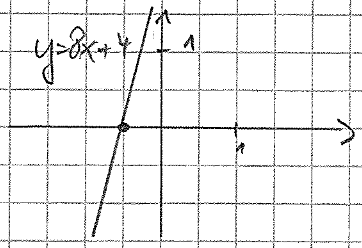
ex 1 : [/14]

(a) $f(x) = 0 \iff \sqrt{8x+4} = 0$

$\iff 8x+4 = 0$

$\iff x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ $\qquad Z_f = \{-\frac{1}{2}\}$ (2)

(b) Pour f : problème si $f(x) < 0 \iff 8x+4 < 0$



donc pb si $x < -\frac{1}{2}$

$D_f = [-\frac{1}{2}; +\infty[$ (2)

Pour g : problème supplémentaire si $\sqrt{8x+4} = 0$, càd si $x = -\frac{1}{2}$

$D_g =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ (2)

(c) $f(0) = \sqrt{8 \cdot 0 + 4} = 2$ (1)

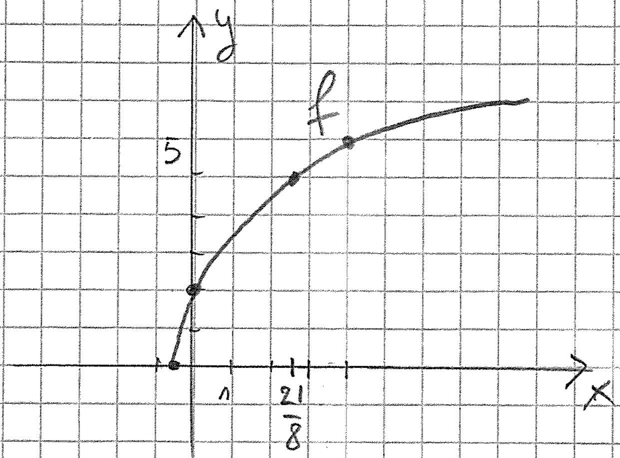
(d) $f(4) = \sqrt{8 \cdot 4 + 4} = 6$ (1)

(e) $\sqrt{8x+4} = 5 \iff 8x+4 = 25$

$\iff 8x = 21$

$\iff x = \frac{21}{8}$ $\qquad f^{-1}(5) = \{\frac{21}{8}\}$ (3)

(f)



(3)

ex2:

[/14]

(a) $f(x) = -12 - 4x + x^2$

$= x^2 - 4x - 12$

$= (x^2 - 4x + 4) - 4 - 12$

$= (x-2)^2 - 16$

$S_f = (2; -16)$ (4)

(b) $g(x) = 2x^2 - x - 10 = (2x-5)(x+2)$

ou $\Delta = 1 - 4 \cdot 2(-10)$ $= 81$ $x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{4}$ $x_1 = 5/2$, $x_2 = -2$ $g(x) = 2(x-\frac{5}{2})(x+2)$

$Z_g = \{-2; \frac{5}{2}\}$ (4)

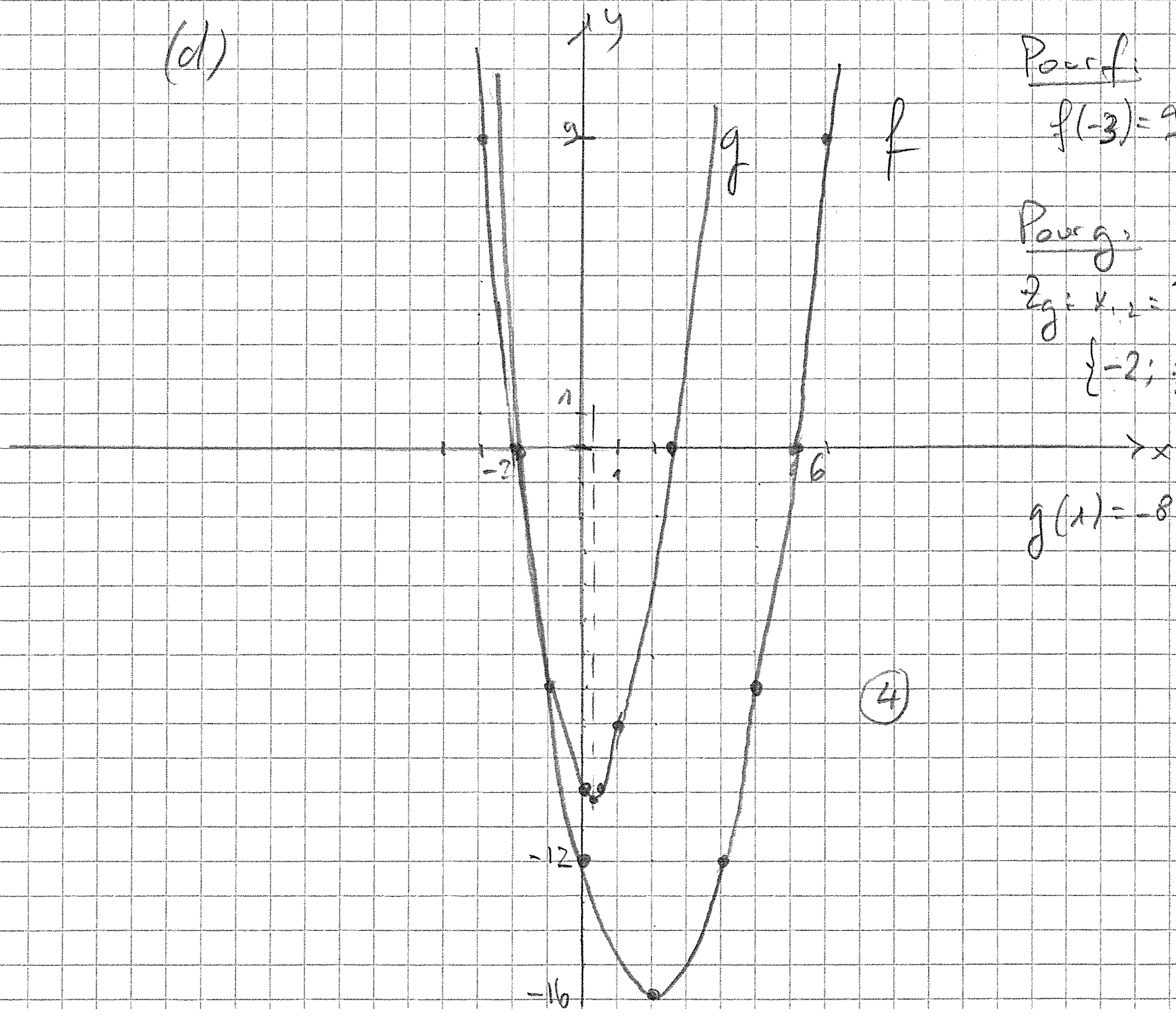
(c) $g(x) = 2x^2 - x - 10$

$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$

$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1-4\cdot 2\cdot(-10)}{8} = -\frac{81}{8}$ (2)

$S_g = \left(\frac{1}{4}; -\frac{81}{8}\right)$

(d)



Pour f:
$f(-3) = 9 = f(7)$

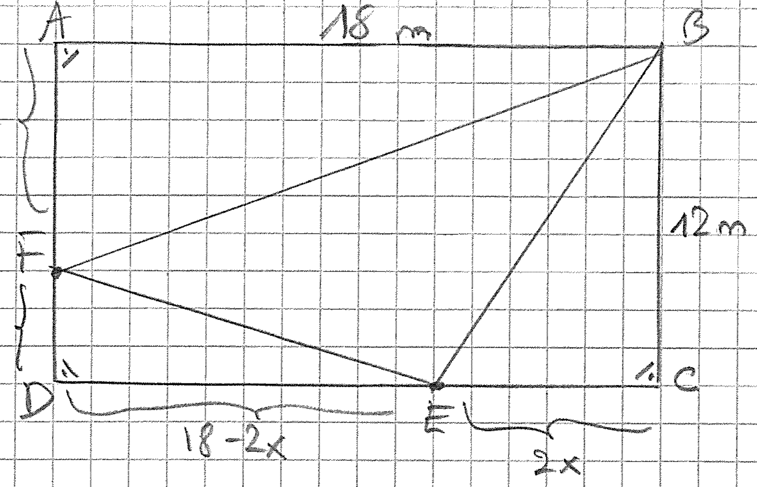
Pour g:
$Z_g: x_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{4}$
$\{-2; \frac{5}{2}\}$

$g(1) = -8$

(4)

ex 3

[/14]



(a) $D_{vripp} = [0;9]$ (2)

(b) $A_{\Delta BCE} = \frac{2x\cdot 12}{2} = 12x$

$A_{\Delta DEF} = \frac{(18-2x)\cdot x}{2} = (9-x)\cdot x = 9x - x^2$ (2)

(c) $A_{\Delta BEF} = Aire_{\square ABCD} - A_{\Delta BCE} - A_{\Delta DEF} - A_{\Delta ABF}$

$= 12\cdot 18 - 12x - (9x - x^2) - \frac{(12-x)\cdot 18}{2}$

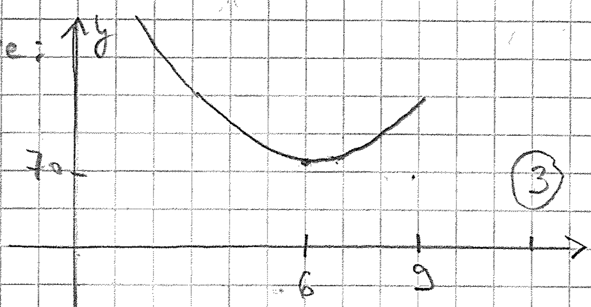
$= 216 - 12x - \cancel{9x} + x^2 - 108 + \cancel{9x}$

$= x^2 - 12x + 108$ (4)

(d) Sommet de la parabole: $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2} = 6\,m$

$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{144-4\cdot 108}{4} = \frac{288}{4} = 72\,m^2$

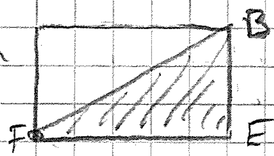
$a > 0$, donc elle est convexe:



(3)

l'aire est minimale pour $x = 6\,m$ et vaut alors $72\,m^2$

(e) l'aire est maximale pour $x = 0\,m$



et vaut alors $\frac{12\cdot 18}{2} = 108\,m^2$ (3)

ex 4 : $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2$

[/17] (a) Candidats $\mathbb{Z}$: $\{\pm 1 ; \pm 2\}$

$f(1) \neq 0$

$f(-1) = +3 - 2 + 5 - 4 - 2 = 0$

$f(2) \neq 0$

$f(-2) = 3 \cdot 16 - 2 \cdot 8 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 2 = 42 \neq 0$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2 & x + 1 \\
\cline{3-3}
- & \underline{3x^4 + 3x^3} & 3x^3 - x^2 + 6x - 2 \\
 & -x^3 + 5x^2 + 4x - 2 & \\
- & \underline{-x^3 - x^2} & \\
 & 6x^2 + 4x - 2 & \\
- & \underline{6x^2 + 6x} & \\
 & -2x - 2 & \\
- & \underline{-2x - 2} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

donc $f(x) = \underbrace{(3x^3 - x^2 + 6x - 2)}_{g(x)}(x+1)$ 3

Candidats $\mathbb{Q}$ pour $g(x)$: $\dfrac{\pm 1 / \pm 2}{\pm 1 / \pm 2 / \pm 3} \Rightarrow \left\{ \pm \frac{1}{2} ; \pm \frac{1}{3} ; \pm \frac{2}{3} \right\}$

$g(\frac{1}{3}) = 0$: 1

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3 - x^2 + 6x - 2 & x - \frac{1}{3} \\
\cline{3-3}
- & \underline{3x^3 - x^2} & 3x^2 + 6 \\
 & 6x - 2 & \\
- & \underline{6x - 2} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

donc $g(x) = (x - \frac{1}{3})\underbrace{(3x^2 + 6)}_{h(x)}$ 3

zeros de $h(x)$: $\Delta < 0$ $S = \emptyset$

(b) d'où $f(x) = (x+1)(x - \frac{1}{3})(3x^2 + 6)$

$= (x+1)\frac{1}{3}(3x - 1) \cdot 3(x^2 + 2)$

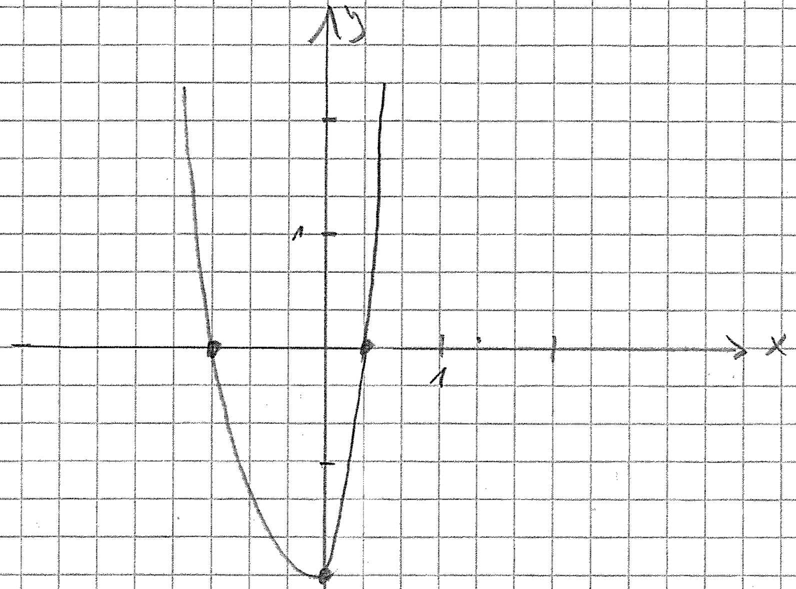
$= (x+1)(3x-1)(x^2+2)$ 2

(c)

x		-1		$1/3$	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3

(d)



3

(e) $f(1) = 12$

$f(-2) = 40$ donc c'est faux 1 + 2

Remarque : pour factoriser $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

on aurait pu faire plus simple.

$$3x^3 - x^2 + 6x - 2 = x^2(3x-1) + 2(3x-1)$$
$$= (3x-1)(x^2+2)$$

ex5 :

/13] (a) Faux, contre-exemple : $P(x) = x^3 \cdot (x-1)^8$

(1+2) est de degré 13 et $Z_p = \{0;1\}$

(b) (i) $(x+3) \mid f(x) \Leftrightarrow f(-3) = 0$ par thm du diviseur

c'est donc vrai (1+2)

(ii) le reste de la division de $f(x)$ par $(x+2)$ est égal à $f(-2)$

par le thm du reste ; comme $f(-2) \cong 3,5 > 0$

c'est donc vrai (1+2)

(c) Soit $a(x)$ de degré 5, divisé par $b(x)$, et soit $q(x)$ le quotient et $r(x)$ le reste de la division de $a(x)$ par $b(x)$:

$\underbrace{a(x)}_{d^\circ 5} = b(x) \cdot \underbrace{q(x)}_{d^\circ 4} + r(x)$ d'où $b(x)$ doit être de degré 1

et on sait que $0 \leq d^\circ(r(x)) < d^\circ(b(x))$

(1+2) soit $0 \leq d^\circ(r(x)) < 1$

ex6 : donc $r(x)$ est de degré 0, c'est correcte VRAI

/8] (a) $P(x) = a(x+2) \cdot (x-1)^2 (x-3)$ (3)

$P(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = a \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-3)$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$

donc $P(x) = -\frac{1}{6}(x+2)(x-1)^2(x-3)$ (2)

(b)

x		-2		1		3	
$-\frac{1}{6}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

(3)