Collège de Saussure | Année scolaire 2011-2012

ÉPREUVE SEMESTRIELLE DE MATHÉMATIQUES
Date : 11 juin 2012

Nom :	Prénom :	
Groupe :	Points :	Note :

Cours (sigle) : 2MA2.DF01

Durée : 120 minutes

Nombre de pages de l'énoncé (y compris la page d'en-tête) : 5

Recto/verso : oui

Annexe(s) (titre et nombre de pages) : aucune

Nombre de points de l'examen :

Documents et matériel autorisés	
a) mis à disposition par le collège :	**b) personnels à l'élève :**
feuilles quadrillées	calculatrice non graphique

Tous les calculs et toutes les étapes de vos raisonnements doivent figurer clairement sur votre copie.

Exercice 1 *(environ 7 points)*

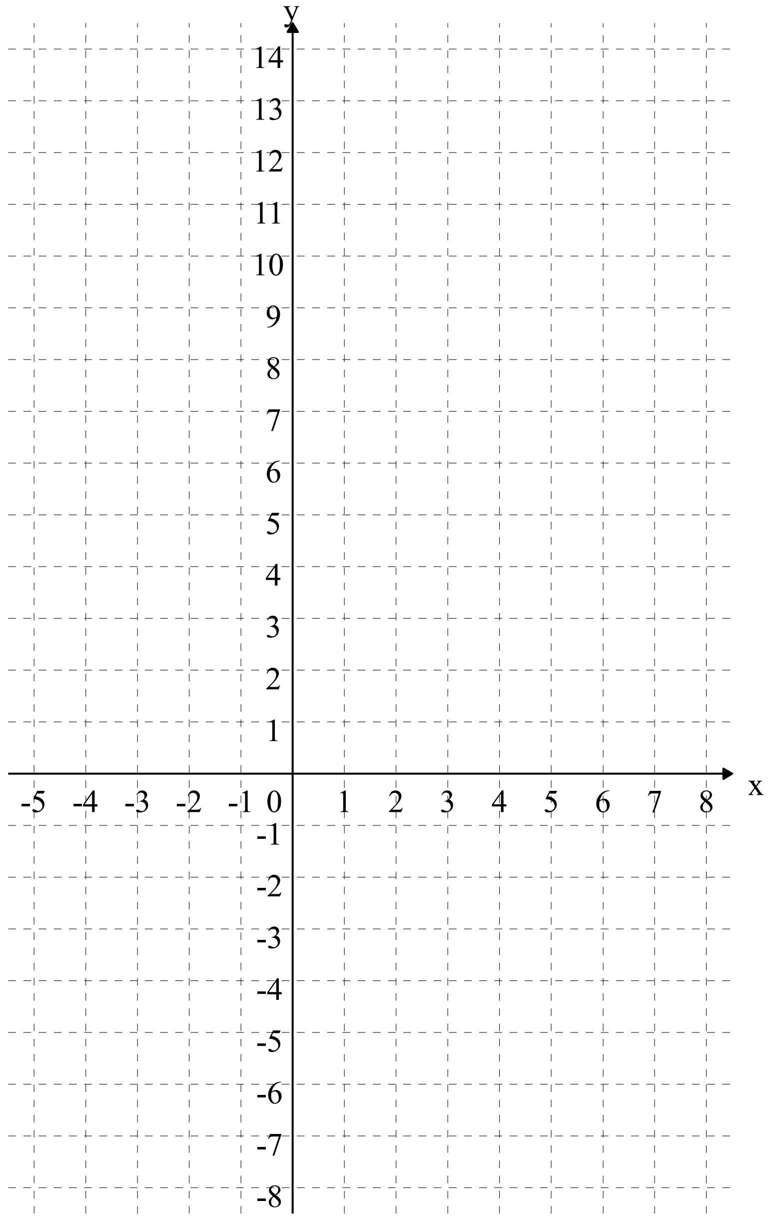
Soit f et g les fonctions réelles déterminées par $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x^2-4x}$ et $g(x)=2$.

(a) Déterminer le domaine de définition D_f et l'ensemble des zéros Z_f de f.

(b) Construire le tableau de signes de f

(c) Déterminer la(les) asymptote(s) verticale(s) et horizontale(s) de f.

(d) En calculant au moins deux images supplémentaires, esquisser ci-dessous une représentation graphique de f qui soit cohérente avec les informations récoltées précédemment :



(e) Sur le même repère qu'en (d), représenter graphiquement la fonction g.

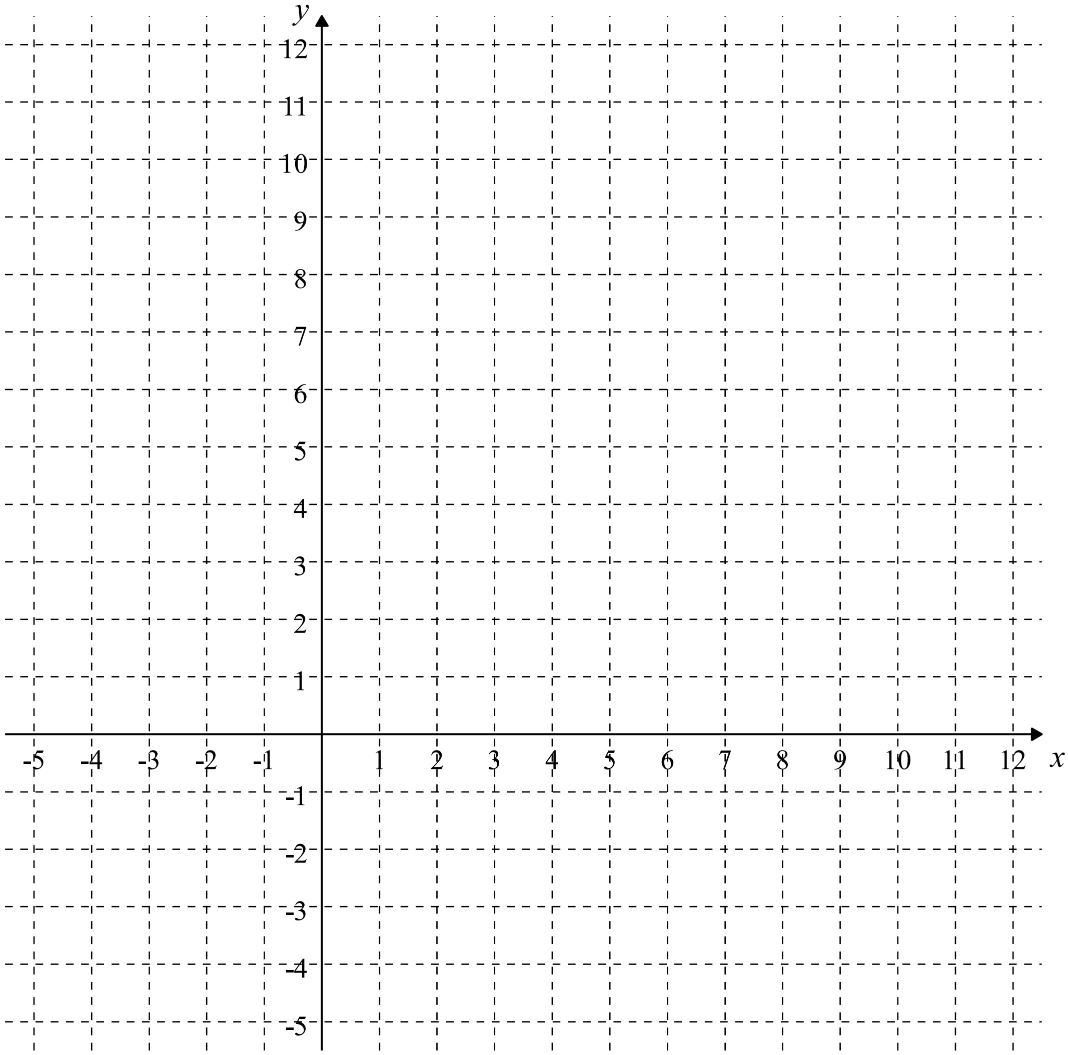
(f) Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 2 *(environ 3 points)*

On considère la fonction réelle *f* définie par $f(x)=(1-x)^2+2$.

(a) Exprimer *f* comme composition de fonctions élémentaires en choisissant parmi les fonctions suivantes: $a(x)=x+2$, $b(x)=x-2$, $c(x)=x^2$, $d(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=1-x$.

(b) Représenter graphiquement *f* avec précision sur le repère ci-dessous :



(c) Déterminer *A* et *B* les plus grands possibles pour que $f : A \to B$ soit bijective.

(d) Représenter graphiquement f^{-1} sur le même repère qu'en (b).

Exercice 3 *(environ 4 points)*

(a) Résoudre $8^{3x+1}=\frac{1}{2^{x-2}}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Résoudre $\log(3-x)+\log(2-x)=\log(26-6x)$ dans $\mathbb{R}$.

(c) Résoudre $\tan(x)\leq-\sqrt{3}$ dans $[0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

Exercice 4 (environ 6 points)

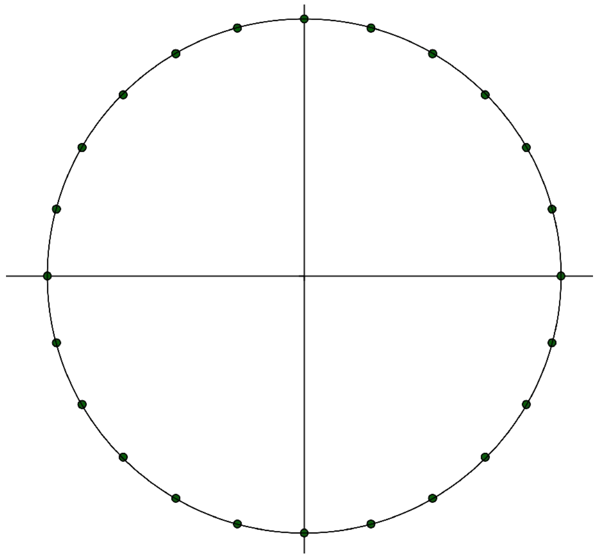
On considère la fonction *f* déterminée par $f(x)=-4\cos(2x+\frac{\pi}{3})$.

(a) Déterminer l'ensemble des zéro(s) Z_f de *f* .

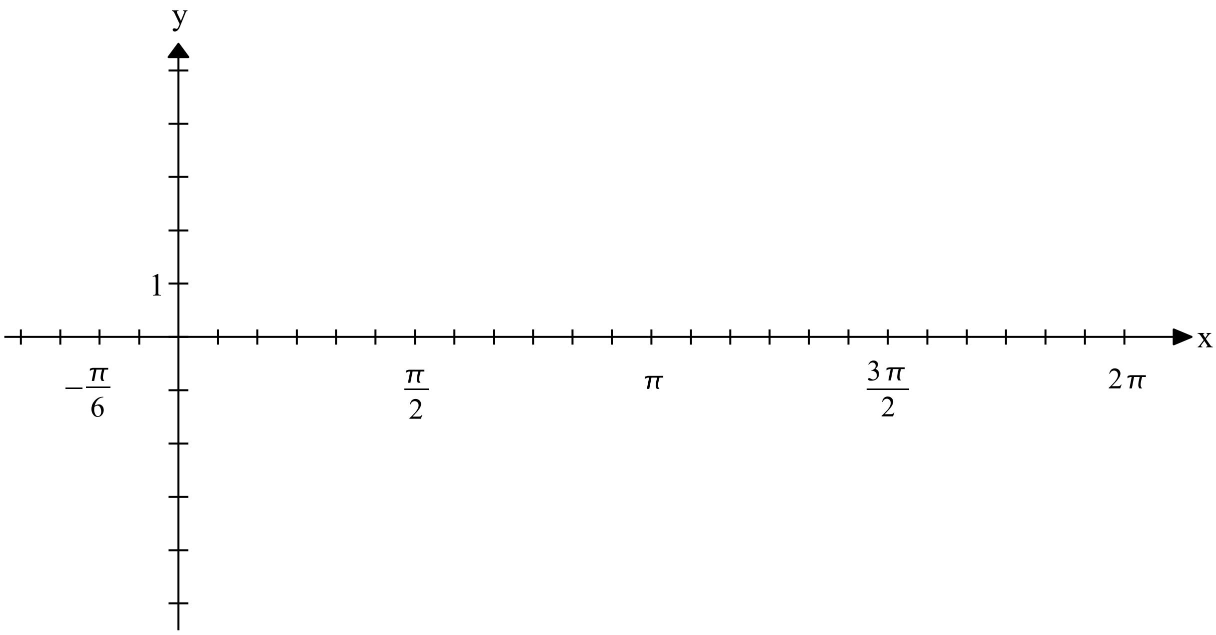
(b) Déterminer la période (on ne demande pas de calcul).

(c) Calculer les images de 0, $\frac{\pi}{6}$ et 2π et donner la réponse sous forme exacte simplifiée au maximum.

(d) Résoudre $f(x)=-2\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur le cercle trigonométrique ci-dessous :



(e) Représenter graphiquement *f* ci-dessous sur l'intervalle $[0;2\pi[$:



Exercice 5 *(environ 5 points)*

Il y a fort longtemps, des naufragés se retrouvèrent sur un ilot inhabité. Fort heureusement pour eux, ils parvinrent à sauver du désastre deux couples de chèvres.

Tout ce beau monde s'adaptant parfaitement au climat de l'île, au bout de deux ans le nombre de chèvres passa de 4 à 10. De plus, on suppose que le nombre de chèvres *N(t)* après *t* années est donné par une fonction du type :

$$N(t) = \frac{100}{1 + B \cdot 3^{at}}$$

(a) En utilisant les informations connues, déterminer les valeurs des paramètres B et a arrondis au millième.

Si vous n'avez pas répondu au point précédent, utiliser $B = 25$ *et* $a = -0{,}403$ *pour la suite.*

Attention : ce n'est pas la bonne réponse pour le point précédent.

(b) Combien aura-t-on de chèvres après 10 ans ?

(c) Au bout de combien d'années le nombre de chèvres atteint-il 90 ?

(d) Le nombre de chèvres va-t-il croître indéfiniment ? Justifier.

Exercice 6 *(environ 3 points)*

Les conjectures sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Si $a>0$, alors $\log(\frac{1}{a}) = -\log(a)$

(b) La fonction définie par $f(x)=\sin(\cos(x))$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$