Math2A Travail n°2 30/11/2011 Corrigé

[/9] ex2 : $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 - 3x - 18$

-3 zéro double $\Leftrightarrow (x+3)^2 \mid f(x) \Leftrightarrow x^2+6x+9 \mid f(x)$

(3)

$$\begin{array}{r|l} x^4+7x^3+13x^2-3x-18 & x^2+6x+9 \\ \hline -\ (x^4+6x^3+9x^2) & x^2+x-2 \\ x^3+4x^2-3x-18 & \\ -\ (x^3+6x^2+9x) & \\ -2x^2-12x-18 & \\ -\ (-2x^2-12x-18) & \\ 0 & \end{array}$$

(4)

donc $f(x) = (x^2+6x+9)(x^2+x-2)$

$= (x+3)^2(x+2)(x-1)$ (2)

[/12] ex1 :

(a) $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-4)^2$

(2)

$g(x) = 2(x+2)^2 \cdot (x-4)^2$

$\left(h(x) = (x+2)^3 (x-4) \right.$

$\vdots$ $\left. \right)$

(b) $x-2 \mid f(x) \Leftrightarrow f(2) = 0$ (2)

$\Leftrightarrow k \cdot 2^3 + 2^2 \cdot k^2 \cdot 2 + 2k^2 - 12k - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 8k + 4 + 2k^2 + 2k^2 - 12k - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 4k^2 - 4k - 8 = 0$

$\Leftrightarrow 4(k^2 - k - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 4(k-2)(k+1) = 0$

$k = 2$ ou $k = -1$ (4)

(c) $\begin{array}{rl|l} x^6 \qquad\qquad -1 & & x^4+1 \\ \cline{3-3} -\quad x^6 \quad +x^2 \qquad\quad & & x^2 \\ \cline{1-1} -x^2 \quad -1 & & \end{array}$

$q(x) = x^2$

$r(x) = -x^2 - 1$ (4)

[/8]

ex3 :

(a) $x-3 \mid f(x) \Leftrightarrow f(3) = 0$ (thm du diviseur)

c'est donc vrai (1+3)

(b) reste de la div. de $f(x)$ par $x+1$ est égal à -2

$\Leftrightarrow f(-1) = -2$ (1+3)

donc c'est vrai (thm du reste)

[/10]

ex4 :

$f(x) = 6x^3 + 7x^2 + 13x + 2$

(a) candidats $\mathbb{Z}$: $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

candidats $\mathbb{Q}$: $\dfrac{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6}{\pm 2; \pm 3; \pm 6}$ (3)

$\Rightarrow \left\{\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{2}{3}\right\}$

(b) on cherche un zéro parmi $\pm \frac{1}{6}$

comme $f(\frac{1}{6})$ ne peut pas être égal à 0, on essaye $-\frac{1}{6}$

$f(-\frac{1}{6}) = 6\cdot(-\frac{1}{6})^3 + 7(-\frac{1}{2})^2 + 13(-\frac{1}{6}) + 2 = \dots = 0$

ex4: $f(x) = 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6$

/10

a) $Div_6 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ candidats $\mathbb{Z}$

$$\frac{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6}{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6} \rightsquigarrow \left\{\pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{3}{2}\right\} \text{ candidats } \mathbb{Q}$$

3

b/c) $f(1) = 6 - 7 + 7 + 6 \neq 0$

$f(-1) = -6 - 7 + 7 + 6 = 0 \Rightarrow x+1 \mid f(x)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & -7x^2 & -7x & +6 & x+1 \\
\hline
-(6x^3 & +6x^2) & & & 6x^2 - 13x + 6 \\
\hline
 & -13x^2 & -7x & +6 & \\
 & -(-13x^2 & -13x) & & \\
\hline
 & & 6x & +6 & \\
 & & -(6x & +6) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

3

donc $f(x) = (x+1)\underbrace{(6x^2 - 13x + 6)}$

$\Delta = 169 - 144 = 25$

$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12} \to x_1 = 3/2, \; \to x_2 = 2/3$

$Z_f = \{-1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\}$

2

$f(x) = (x+1) \cdot 6 \cdot (x - \frac{3}{2})(x - \frac{2}{3})$

$= (x+1) \cdot 6 \left(\frac{2x-3}{2}\right)\left(\frac{3x-2}{3}\right)$

$= (x+1)(2x-3)(3x-2)$

2

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6x^3+7x^2+13x+2 & x+\frac{1}{6} \\ \cline{3-3}
- & 6x^3+x^2 & 6x^2+6x+12 \\ \cline{2-2}
 & 6x^2+13x+2 & \\
- & 6x^2+x & \\ \cline{2-2}
 & 12x+2 & \\
- & 12x+2 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

(5)

donc $f(x) = (x+\frac{1}{6})(6x^2+6x+12)$

$= (x+\frac{1}{6})\cdot 6\cdot(x^2+x+2)$

$= \frac{(6x+1)}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6}\cdot(x^2+x+2)$

Remarque : on aurait pu être plus futé et diviser directement par $6x+1$!

Pour x^2+x+2 : $\Delta = 1-4\cdot1\cdot2 < 0$ pas de fact possible $\Rightarrow Z_f = \{-\frac{1}{6}\}$

(c) donc $f(x) = (6x+1)(x^2+x+2)$ (2)

[/18] ex 5 :

a) HYP [Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est une fct polyn. à coeff. entiers, et si c est un zéro de f,

CONC [alors c / a_0

(4)

b) Faux

contre-ex : $f(x) = 2x^2+1$ et $c=1$, $d=2$

on a bien : $c/1$ et $d/2$

mais $f(\frac{1}{2}) \neq 0$! (1+3)

Exercice 5 (environ 15 points)

(a) Enoncer précisément le théorème sur les zéros entiers d'une fonction polynomiale en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

(b) Sa réciproque est-elle vraie ? Justifier.

(c) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème. Donner les arguments qui manquent et compléter lorsque c'est nécessaire (directement sur la feuille d'énoncé) :

Démonstration :

c est un zéro de [f] (0.5)

car [ARG1: par hypothèse] (1)

donc $f(c) = [0]$ (0.5)

car [ARG 2: déf de "zéro"] (1)

càd que : $[a_n]c^n + a_{n-1}[c]^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \ldots + a_2c^{[2]} + [a_1]c + a_0 = 0$ (0.5)

car [ARG 3: on a substitué $x = c$] (1)

d'où $[a_n]c^n + a_{n-1}[c]^{n-1} + a_{n-2}c^{n-2} + \ldots + a_2c^{[2]} + [a_1]c = -a_0$ (0.5)

car [ARG 4: on soustrait a_0 des 2 côtés de l'équation] (1)

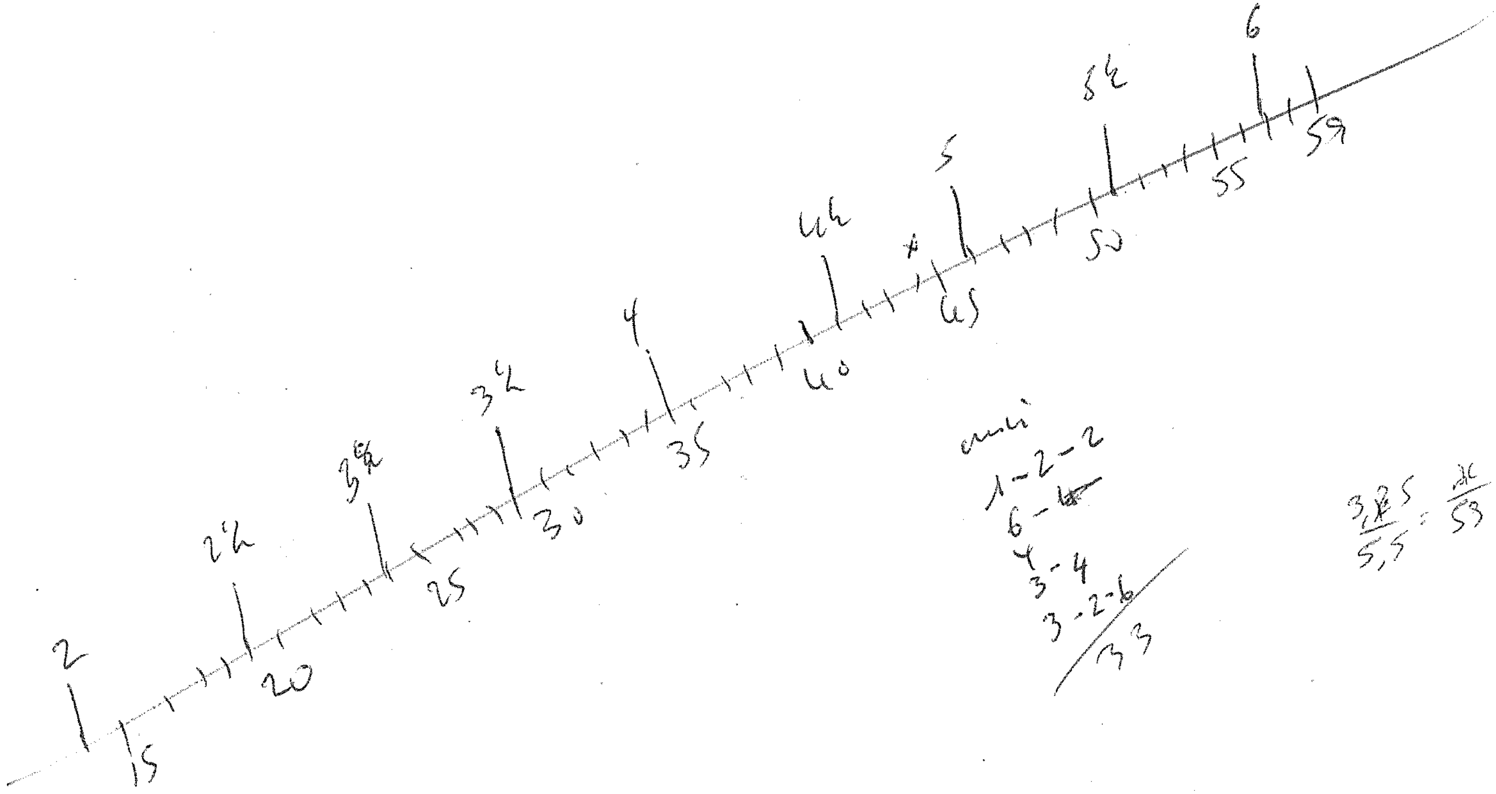
d'où $c \cdot \left(a_nc^{n-1} + a_{n-1}[c]^{n-2} + a_{n-2}c^{n-3} + \ldots + a_2c + a_1\right) = -[a_0]$ (0.5)

car [ARG 5: mise en évidence de c] (1)

on en déduit que [c] est un diviseur de a_0 (0.5)

car [ARG 6: définition de "diviseur" et $(a_nc^{n-1} + \ldots + a_1) \in \mathbb{Z}$] (2)

/10



mai
1-2-2
6-~~4~~
4
3-4
3-2-6
33

$$\frac{3{,}25}{5{,}5} = \frac{x}{53}$$