Sem1 decembre 2013 MATH 2A

ex5

[/14] (a) Faux (1+2)

Contre-ex : $f(x) = x^2-2x+1 = (x-1)^2$ a son unique zéro $Z_f = \{1\}$ et est de degré 2

(b) Vrai : candidats $Div_1 = \{\pm 1\}$ (1+2)

par thm "recherche de zéros entiers"

on a : $P(1) = 2+1+2+1 \neq 0$

$P(-1) = -2+1-2+1 \neq 0$ } donc $P(x)$ ne possède pas de zéro entier

(c) $x-17 \mid P(x) \iff P(17) = 0$

par thm reste nul et sa réciproque, tous deux vrais et démontrés

$P(17) = 17^{2013} - 2013 \cdot 17 + 17 \neq 0$, donc $x-17 \nmid P(x)$ (1+3)

C'est donc faux

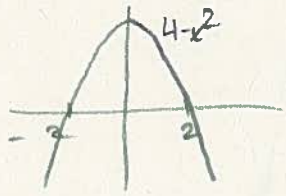
(d) Faux

contre-exemple : $P(x) = x^2+1$

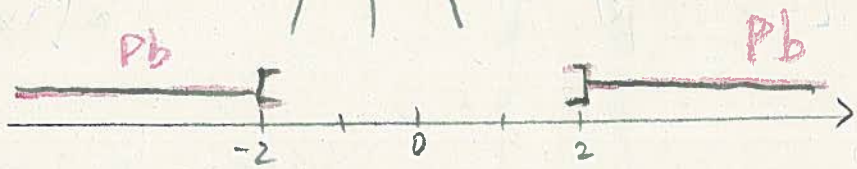
$a_0 = 1$, $c = 1$ est un diviseur de a_0 mais $P(1) \neq 0$ (1+3)

[/12] ex1

(a) pb si $4-x^2 < 0$



donc pb si $x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty$



$D_f = [-2;2]$ (3)

Zéros : $\sqrt{4-x^2} = 0 \iff 4-x^2 = 0 \iff (2-x)(2+x) = 0$

$x = 2$ ou $x = -2$

$Z_f = \{\pm 2\}$ (2)

$f(0) = \sqrt{4} = 2$ (1)

(b) D_f : pb si $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

$D_f = \{-1; 0; 1\}$ (2)

zéros : $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 8x + 9}{x^3 - x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 9 = 0$ et $x^3 - x \neq 0$

$\Delta = 64 - 36 = 28$

$x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$

$= 4 \pm \sqrt{7}$

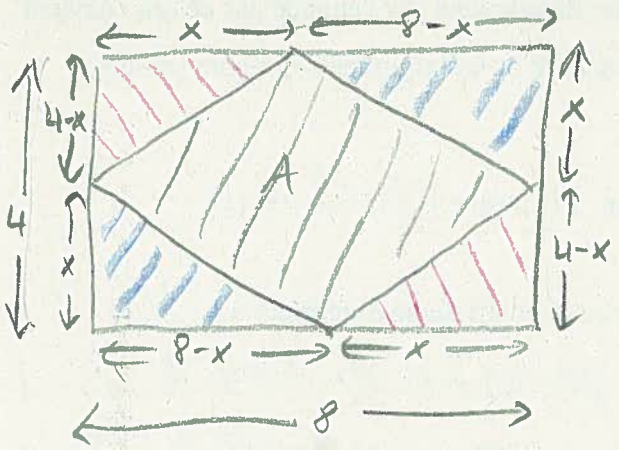
càd $x \in D_f$

$\Rightarrow Z_f = \{4 \pm \sqrt{7}\}$ (3)

$0 \notin D_f$ donc $g(0) \nexists$ (1)

Ex 3

[/14]



(a) $D_{vip} = [0; 4]$ (1)

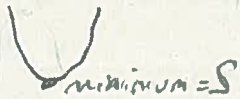
(b) $A = 8 \cdot 4 - [(8-x)x + (4-x)x]$

$= 32 - [8x - x^2 + 4x - x^2]$

$= 32 - [-2x^2 + 12x]$

$= 2x^2 - 12x + 32$ (3)

(c) $A(x)$ de degré 2, $a = 2 > 0$ donc repr. graph = parabole convexe



$S = \left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$: $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 32$

$= 144 - 256$

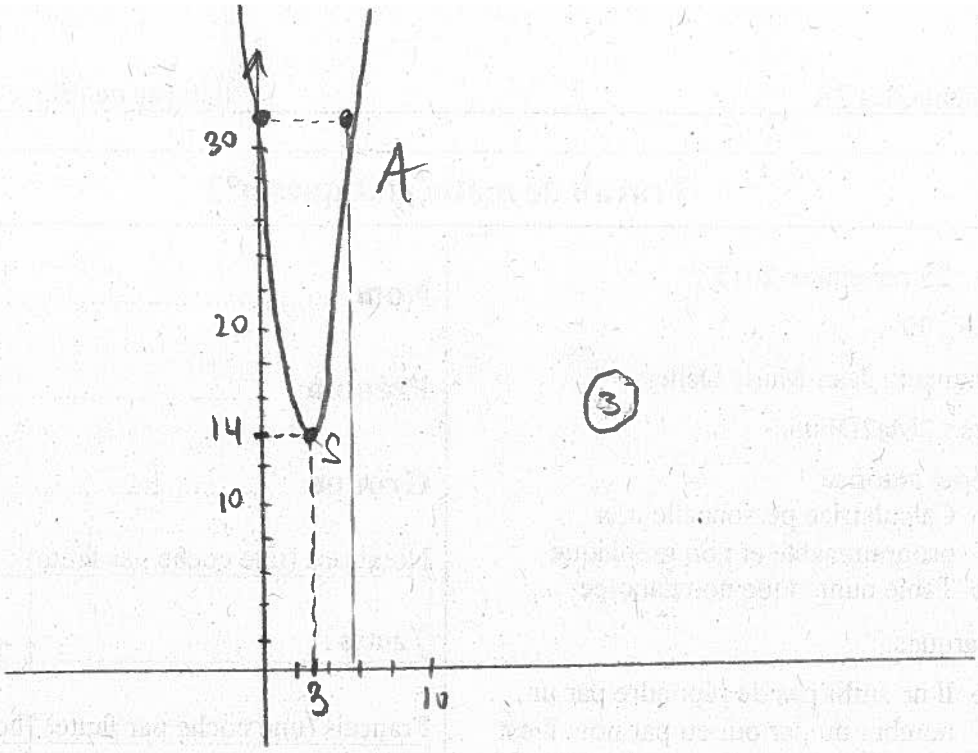
$= -112$

$S = \left(\dfrac{12}{4}; \dfrac{+112}{8}\right) = (3; 14)$

l'aire est minimale pour $x = 3$ [cm] ; elle vaut alors 14 [cm²]

(2) (2) (1)

(d)



3

(e) l'aire est maximale si $x=0$ ou si $x=4$

$A(0)=32$
$A(4)=2\cdot 4^2-12\cdot 4+32=16$ } donc l'aire est maximale pour $x=0$ [m] ; elle vaut alors 32 [m²]

3 (en fait MNPQ = ABCD dans ce cas !)

ex4

[/15]

(a) $S=(1;3)$ donc $f(x)=a(x-1)^2+3$ 1

$f(0)=2 \Leftrightarrow a(-1)^2+3=2$
$\Leftrightarrow a=-1$

$\Rightarrow f(x)=-(x-1)^2+3$: forme standard 2

$=-(x^2-2x+1)+3$
$=-x^2+2x+2$: forme développée 1

$\Delta=4-4(-1)\cdot 2=12$

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{-2\pm\sqrt{4\cdot 3}}{-2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{-2}$

$=\frac{-2}{-2}\pm\frac{2\sqrt{3}}{-2}=1\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ 3

$=-(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))$
$=-(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$: forme factorisée

(b) -2, 1 et 2 sont des zéros de multiplicité 1

0 est un zéro " " 2

donc $g(x) = a(x+2)\cdot(x-1)(x-2)\cdot(x-0)^2$ (2)

$g(-1) = -3 \Leftrightarrow a(-1+2)(-1-1)(-1-2)(-1)^2 = -3$

$\Leftrightarrow a(+6) = -3$

$\Leftrightarrow a = -1/2$

$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2)x^2$ (2)

(c) $h(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)^3$: degré 5 avec $Z_h = \{1; 2; 3\}$ (2)

$h(0) = 4 \Leftrightarrow a(4-1)(4-2)(4-3)^3 = 4$

$\Leftrightarrow a\cdot 3\cdot 2 = 4$

$\Leftrightarrow a = 2/3$

$\Rightarrow h(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-2)(x-3)^3$ (2)

ex2 $f(x) = -6x^3 - 5x^2 + 8x + 3$

/14 (a) candidats $\mathbb{Z}$: $Div_3 = \{\pm 1; \pm 3\}$

$f(1) = -6 - 5 + 8 + 3 = 0$

on divise par $(x-1)$:

$$\begin{array}{r|l} -6x^3 - 5x^2 + 8x + 3 & x-1 \\ \hline -\ (-6x^3 + 6x^2) & -6x^2 - 11x - 3 \\ -11x^2 + 8x + 3 & \\ -\ (-11x^2 + 11x) & \\ -3x + 3 & \\ -\ (-3x + 3) & \\ 0 & \end{array}$$

donc $f(x) = (x-1)\underbrace{(-6x^2 - 11x - 3)}_{g(x)}$

$g(x)$: $\Delta = (-11)^2 - 4(-6)(-3) = 121 - 72 = 49$

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 7}{-12}$ $\rightarrow x_1 = -18/12 = -3/2$, $\rightarrow x_1 = -4/12 = -1/3$

$g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$= -6(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{3})$

$= -6(\frac{2x+3}{2})(\frac{3x+1}{3})$

$= -(2x+3)(3x+1)$

donc : $f(x) = -(x-1)\cdot(2x+3)(3x+1)$

et $Z_f = \{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}; 1\}$ (5)

(b)

		$-3/2$		$-1/3$		1	
$-(x-1)$	+	+	+	+	+	0	−
$2x+3$	−	0	+	+	+	+	+
$3x+1$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	+

3

(c) $f(x) < 0 \iff x \in \left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]1; +\infty\right[$ 2

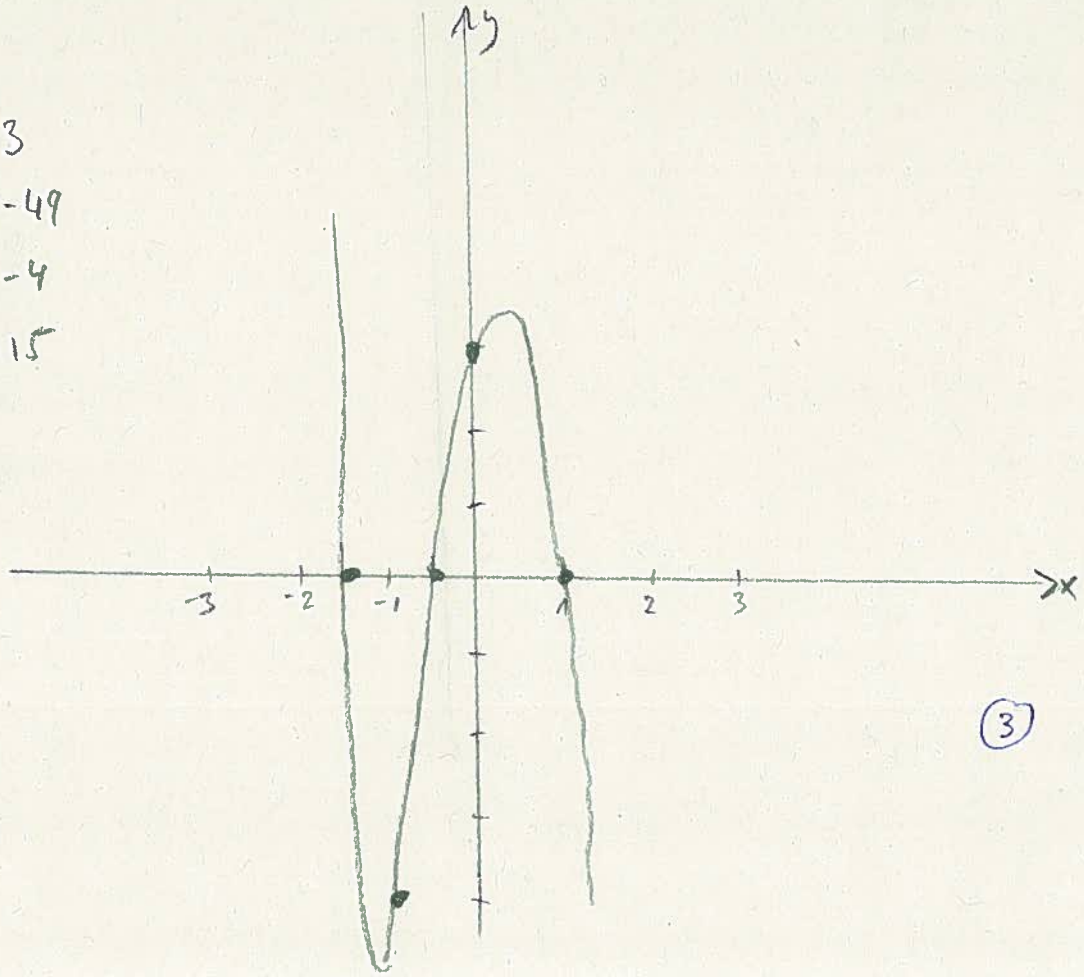
(d)

$f(0) = 3$

$f(2) = -49$

$f(-1) = -4$

$f(-2) = 15$

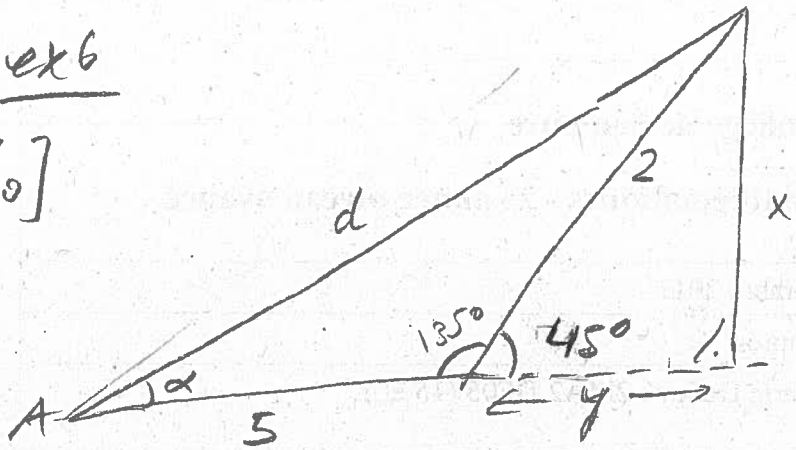


3

(e) $f^{-1}(-4) \cong \{-1; 1,1\}$ 1

ex6

[/10]



Méthode 1:

$\sin(45) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\sin(45) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\cos(45) = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2\cos(45) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$d^2 = x^2 + (5+y)^2 \Leftrightarrow d^2 = (\sqrt{2})^2 + (5+\sqrt{2})^2$

$d^2 = 2 + 25 + 10\sqrt{2} + 2$

$d^2 = 29 + 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow d = \sqrt{29+10\sqrt{2}} \simeq 6{,}57$ [km]

(2) (1) (6) (1)

Méthode 2: thm du cosinus: $d^2 = 5^2 + 2^2 - 2\cdot5\cdot2\cos(135)$

$= 29 - 20\cos(135)$

$= 29 - 20[-\cos(45)]$

$= 29 + 20\cos(45)$

$= 29 + 20\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 29 + 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow d = \sqrt{29+10\sqrt{2}} \simeq 6{,}57$ [km]