Ma2A Semestrielle juin 2014 Corrigé

[/12]

Q1 $P(t) = P_0 (1+0{,}002)^t$ avec $P_0 = 8000000$

(1) a) $P(2) = 8032032$ hab

(1) b) $P(7) \simeq 8112674$ hab

c) $P(t) = 50\,000\,000 = 8\,000\,000(1{,}002)^t$

$\Leftrightarrow 1{,}002^t = \frac{50}{8} \Leftrightarrow t = \frac{\log(50/8)}{\log(1{,}002)} \simeq 917{,}2$

dans 917,2 an, soit en $2013 + 917{,}2 \simeq 2930{,}2$

(5) $\Rightarrow$ en 2930

d) $2030 - 2013 = 17$ ans ; $50\,000\,000 = 8\,000\,000(1+i)^{17}$

$\Leftrightarrow (1+i)^{17} = \frac{50}{8}$

$\Leftrightarrow 1+i = \sqrt[17]{\frac{50}{8}}$

$\Leftrightarrow i = \sqrt[17]{\frac{50}{8}} - 1 \simeq 0{,}1138$

(5) soit un taux d'environ 11,38 % par an

[/8]

Q2 • la 1re est de type exponentielle : soit 3^{-x}, soit 3^x

(2) comme $f(1) = 3$, c'est $\boxed{f(x) = 3^x}$

• la 2e est de type trigonométrique,

$g(0) = 0$: ce n'est pas un $a \cdot \cos(bx)$ car $g(0)$ serait alors $a \cdot \cos(b \cdot 0) = a$

(2) $g(\frac{\pi}{2}) = -3$: or $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 \neq 0$; $\sin(\frac{-\pi/2}{3}) = -\frac{1}{2} \neq 0$

$\sin(-3\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$

mais $-3\sin(\frac{\pi}{2}) = -3 \cdot 1 = -3$

donc $\boxed{g(x) = -3\sin(x)}$

• $h(x)$ est trigonométrique ;

(2) $h(0)=1$, donc ce n'est pas $a\sin(bx)$
car $a\sin(b\cdot 0)=0$

$h(\frac{\pi}{2})=1$, or $3\cos(\frac{\pi}{2})=0$

$\cos(\frac{3\pi}{2})=0$

$\cos(3\frac{\pi}{2})=0$

mais $\cos(4\cdot\frac{\pi}{2})=1$

c'est donc $h(x)=\cos(4x)$

• $l(x)$ est de type valeur absolue :

$l(-1)=0$, or $|2(-1)-2|=4\neq 0$

$|-1-1|=2\neq 0$

(2) $l(0)=2$, or $|2\cdot 0^2-1|=1$

et $|2(-1)+2|=0$

$|2\cdot 0+2|=2$ c'est donc $l(x)=|2x+2|$

[15] Q3

a) D : pb si $x-2\leq 0$
$x\leq 2$

pb si $2x-3\leq 0$
$2x\leq 3$
$x\leq 3/2$

$\Rightarrow D=]2;+\infty[$

$\log_3(x-2)+\log_3(3)=\log_3(2x-3)$

$\Leftrightarrow \log_3(3(x-2))=\log_3(2x-3)$

$\Leftrightarrow 3x-6=2x-3$

$\Leftrightarrow x=3\in D$

donc $S=\{3\}$ (5)

b) $12^{2x+5} = 55.7^{3x}$

$\Leftrightarrow \log(12^{2x+5}) = \log(55.7^{3x})$

$\Leftrightarrow (2x+5)\log(12) = \log(55) + 3x\log(7)$

$\Leftrightarrow x(2\log(12) - 3\log(7)) = \log(55) - 5\log(12)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log(55) - 5\log(12)}{2\log(12) - 3\log(7)} \simeq 9{,}70$

4

c) $|x+1| = x^2 + 4x + 3$

si $x+1 \geq 0$
$x \geq -1$: $x+1 = x^2 + 4x + 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0$

$x = -2$ ou $x = -1$
$\notin D$ $\in D$

$S_1 = \{-1\}$

si $x+1 < 0$: $-(x+1) = x^2 + 4x + 3$
$x < -1$

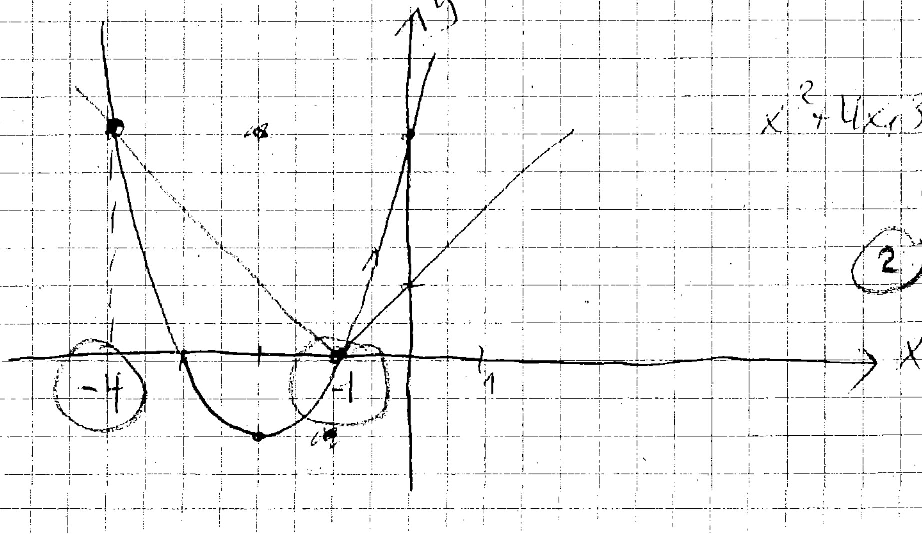
$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(x+1) = 0$

$x = -4$ ou $x = -1$ $\Rightarrow S_2 = \{-4\}$
$\in D$ $\notin D$

4

$S = \{-4; -1\}$



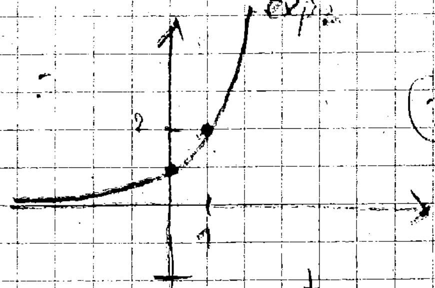
$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

2

(/6)

Q4

a) Faux :

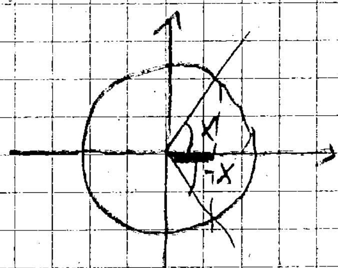


(3)

contre-ex : -2 n'a pas de préimage

b) Vrai : défn $\cos(x) = \cos(-x)$

(3)

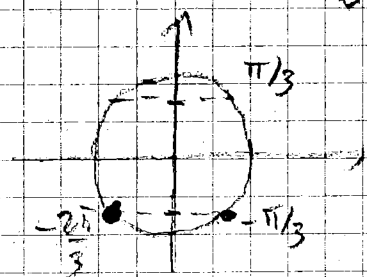


$\cos(x) = \cos(-x)$

(/7)

Q5

$\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

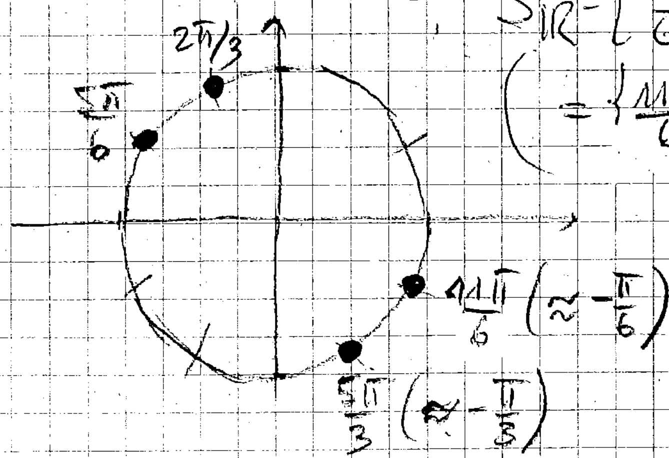


$2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

(4) $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi ; -\frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$

$\left(= \left\{ \frac{11\pi}{6} + k\pi ; \frac{5\pi}{3} + k\pi \right\} \right)$



(3)

$S_{[0;2\pi]} = \left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{3} ; \frac{11\pi}{6} \right\}$

Q6

[/15]

a) D_g : pb si $(x+4)(x-2)=0$

$x+4=0$ ou $x-2=0$
$x=-4$ $\quad$ $x=2$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-4 ; 2\}$ (2)

Z_g : $g(x)=0 \Leftrightarrow -2x+6=0$
$x=3$

$Z_g = \{3\}$

b)

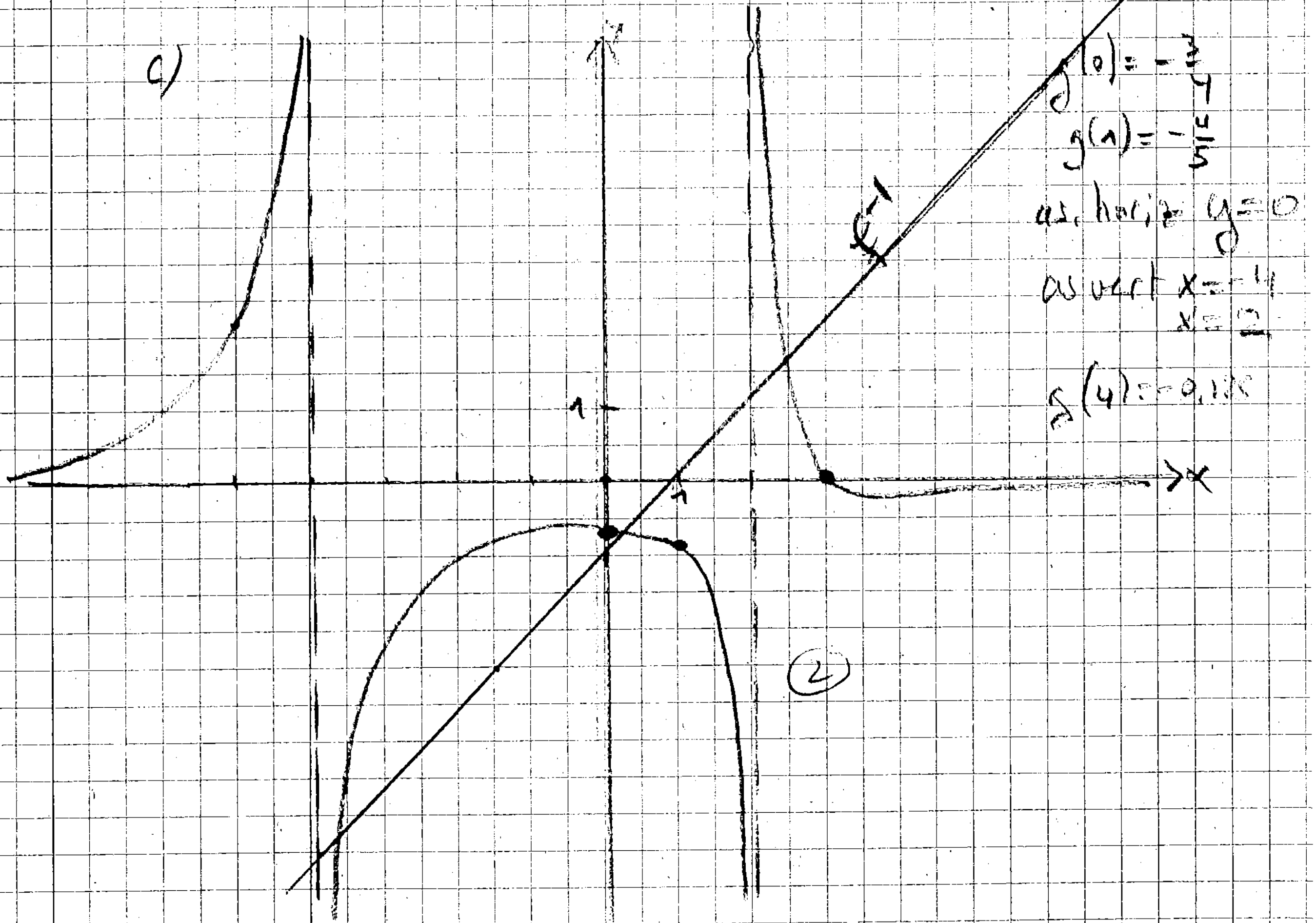
x		-4		2		3	
$-2x+6$	+	+	+	+	+	0	−
$x+4$	−	0	+	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	0	+	+	+
$g(x)$	+	//	−	//	+	0	−

(3)

as. vert : $x=-4$
$x=2$

as. horiz : $y=0$ (2)

c)



d) $f \circ f(x) = f(x+1) = (x+1)+1 = x+2$ (2)

$g \circ f(x) = g(x+1) = \dfrac{-2(x+1)+6}{(x+1+4)(x+1-2)} = \dfrac{-2x+4}{(x+5)(x-1)} = \dfrac{-2(x-2)}{(x+5)(x-1)}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (1)

f) $y = x+1 \Leftrightarrow x = y-1$ $\quad f^{-1}(y) = y-1$ ou $f^{-1}(x) = x-1$ (2)