Travail de mathématiques n°2

<table>
<tr>
<td>
Date : 25 novembre 2013
Durée : 90'
Enseignant : Jean-Marie Delley
Cours : 2Ma2DF05
Matériel autorisé
o Calculatrice personnelle non programmable et non graphique
o Table numérique non annotée
Remarques
o Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
o Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
o Indiquez vos initiales en haut de chaque page
</td>
<td>
Nom: ....
Prénom: ....
Groupe: ....
Notations (une coche par faute) :
Fautes : → .... / ....
Français (une coche par faute) [bonus] :
Fautes : → .... / ....
Total des points des exercices : ...... / ....
Total des points del'épreuve : ...... / ......
Note : / 6
</td>
</tr>
</table>

Début du travail

Exercice 1 (environ 6 pts)

On considère les deux polynômes suivants : $P(x)=-x^4+x^3-3$ et $T(x)=x^2-1$

(a) Effectuer la division polynomiale de $P(x)$ par $T(x)$ en identifiant clairement quotient $Q(x)$ et reste $R(x)$.

(b) Effectuer le calcul $T(x)Q(x) + R(x)$ pour montrer qu'on retrouve bien $P(x)$.

Exercice 2 (environ 6 pts)

Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x)=-0,1(-x^2-3)(2x+4)(x^2-4)(-x+1)x^2$

(a) Déterminer l'ensemble des zéros de f .

(b) Donner le tableau de signes de f.

(c) Proposer une représentation graphique de f cohérente avec les résultats trouvés précédemment et en utilisant les informations suivantes : $f(-1) = -4,8$, $f(0,5) \cong -0,8$ et $f(1,5) \cong 7,2$ (calculer si nécessaire quelques images).

Exercice 3 (environ 20 pts)

On s'intéresse au théorème du reste nul :

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale telle que $f(c)=0$, alors $(x-c)$ divise $f(x)$

(a) Identifier clairement hypothèse(s) et conclusion(s) de ce théorème.

(b) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème :

- pour chaque [….........], compléter directement sur l'énoncé par ce qui convient
- pour chaque [ARG : …......], donner le ou les arguments qui conviennent, directement sur l'énoncé

- on divise $f(x)$ par $x-c$ et on obtient $f(x)=q(x)[.................]+r(x)$
- on sait que le degré de $r(x)$est positif ou nul et strictement inférieur à [….....]

  car [ARG1: ....]
- on en déduit que $f(x)=q(x)(x-c)+d$, où $d\in\mathbb{R}$ est une […..........................]

  car [ARG2: ....]
- donc $[.................]=q(c)(c-c)+d$

  car [ARG3: ....]
- càd $f(c)=[.................]$

  car [ARG4: ....]
- mais nous savons par ailleurs que [….....] = 0

  car [ARG5: ....]
- on en déduit que [….....] = 0

  car [ARG6: ....]
- ceci implique que $(x-c)$ divise $f(x)$

  car [ARG7: ....]

(c) Enoncer la réciproque de ce théorème.

(d) Enoncer la contraposée de cette réciproque.

(e) Vrai ou faux ? Justifier.

Le polynôme f défini par $x^{12}+12x^{11}+9x^5+x^4+9x^2-1$ est divisible par $(x$-1)

Quel est le résultat utilisé dans votre justification : le théorème du reste nul, sa réciproque ou la contraposée de sa réciproque ?

Exercice 4 (environ 8 pts)

Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$.

Déterminer l'ensemble des zéros de f ainsi que la factorisation complète de f .

Exercice 5 (environ 7 pts)

(a) Donner une fonction polynomiale de degré 5 admettant exactement les cinq zéros suivants : -2, -1, 0 , 1 et 2.

(b) Donner une fonction polynomiale de degré 5 différente de celle de (a) admettant exactement les cinq zéros suivants : -2, -1, 0 , 1 et 2.

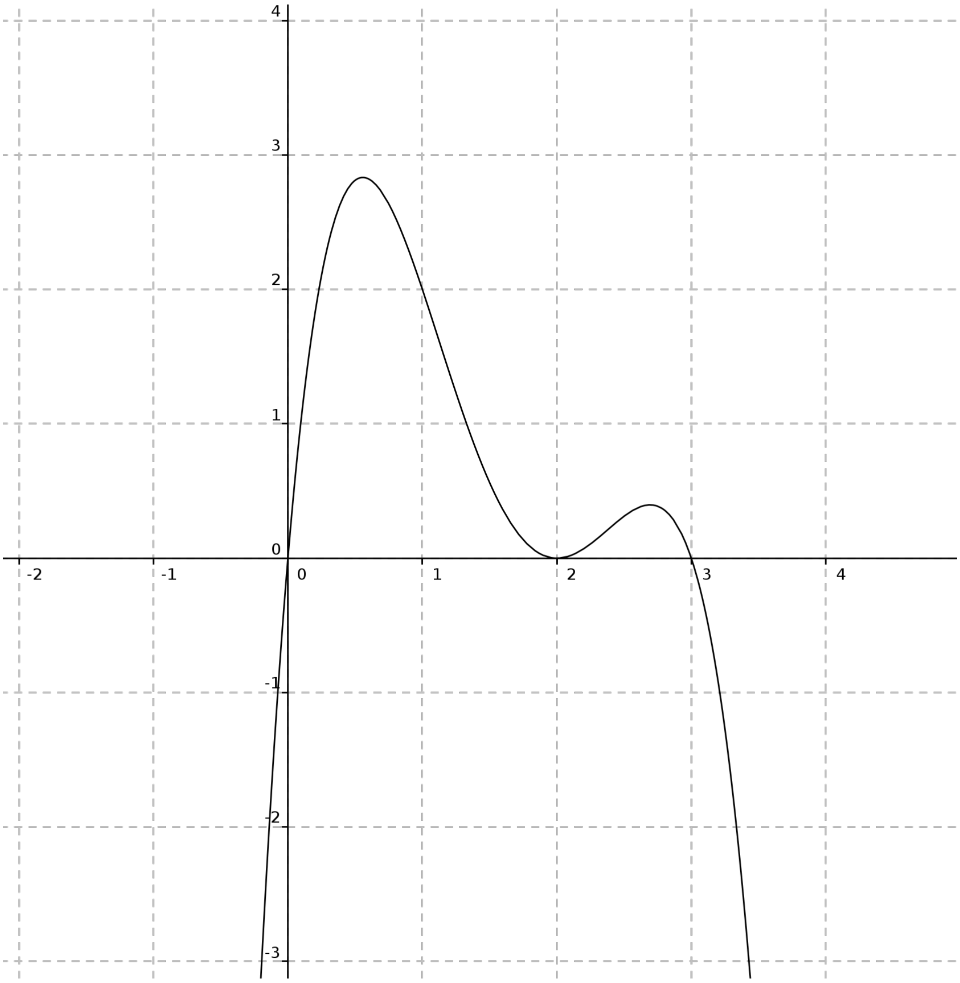
(c) Donner toutes les fonctions polynomiales de degré 5 admettant exactement les cinq zéros suivants : -2, -1, 0 , 1 et 2.

(d) Donner une fonction polynomiale de degré 5 admettant exactement les trois zéros suivants : 0 , 1 et 2.

(e) Donner une fonction polynomiale de degré 6 n'admettant aucun zéro.

Exercice 6 (environ 5 pts)

Déterminer une fonction polynomiale de degré minimal correspondant à la représentation graphique ci-dessous :


4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4