

<b>Collège de Saussure</b> <b>Examen semestriel de mathématiques de 2e année, niveau avancé</b>	
Date	8 juin 2016
Durée	120 minutes
Maîtres, cours et nombre d'élèves	Jean-Marie Delley 2Ma2.DF01 (17 élèves)
Nombre de pages	14 (inclus deux annexes)
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	7
Documents et matériel autorisés	personnels : <ul style="list-style-type: none"> <li>• calculatrice TI-30XS MultiView, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable, <u>TI30X-Pro interdite</u>) ;</li> </ul> fournis : <ul style="list-style-type: none"> <li>• feuilles quadrillées ;</li> </ul>
Annexe	<ul style="list-style-type: none"> <li>• cercle trigonométrique;</li> <li>• liste « boîte à outils » pour justifier en géométrie;</li> </ul>
Consignes	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>répondre sur les feuilles d'énoncé</b> ; si nécessaire, vous pouvez joindre une ou plusieurs des feuilles quadrillées fournies ;</li> <li>• la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ;</li> <li>• tous les calculs et toutes les étapes de vos raisonnements doivent figurer sur votre copie ; le détail des justifications attendues est explicité pour chaque exercice.</li> </ul>

**Nom** : ..... **Prénom** : .....

**Groupe**: ..... **Cours** : .....

**Points obtenus**: ..... **Note**: .....

### Répartition des points

*Exercice 1 : 5 points*

*Exercice 2 : 6 points*

*Exercice 3 : 8 points*

*Exercice 4 : 16 points*

*Exercice 5 : 8 points*

*Exercice 6 : 7 points*

*Exercice 7 : 5 points*

*Notations : 2 points*

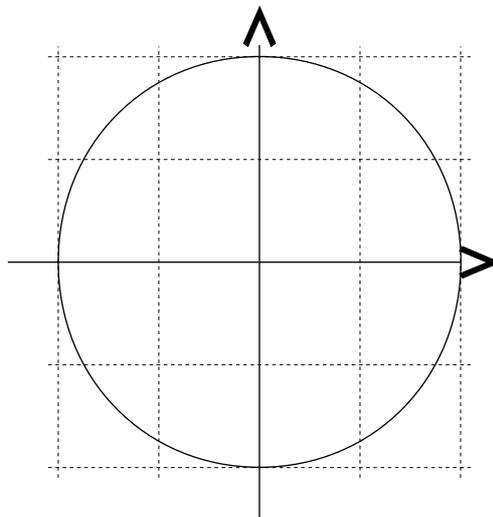
**Total : 57 points**

*Exercice 1 (environ 5 points)*

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\log(x) + \log(x-3) = 1$

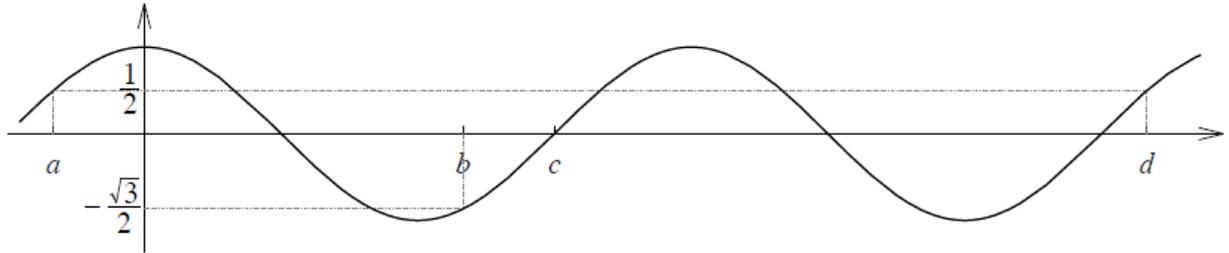
Exercice 2 (environ 6 points)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$  puis identifier et représenter les solutions comprises dans  $[0; 2\pi[$  sur le cercle trigonométrique fourni.



*Exercice 3 (environ 8 points)*

Voici une partie d'une représentation graphique de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \cos(x)$ .



Déterminer les valeurs exactes de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

*Exercice 4 (environ 16 points)*

On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définies par  $g(x) = \frac{2x-5}{x-3}$  et  $h(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$ .

(a) Déterminer toutes les asymptotes de  $h$ .

(b) Résoudre l'inéquation  $h(x) \geq 6$ .

(c) Représenter graphiquement  $h$  et interpréter graphiquement le résultat trouvé en (b).

(d) Déterminer les plus grands ensembles  $A$  et  $B$  pour que  $h$  soit bijective de  $A$  dans  $B$ .

- (e) Déterminer les fonctions composées  $h \circ g$  et  $g \circ h$  en simplifiant au maximum les réponses.
- (f) Déterminer la fonction  $h^{-1}$  réciproque de  $h$  et la représenter graphiquement dans le même repère que  $h$ .

*Exercice 5 (environ 8 points)*

Une quantité initiale  $Q_0$  diminue exponentiellement de telle sorte qu'elle est divisée par 2 tous les 12 ans.

(a) Déterminer le pourcentage de diminution de  $Q_0$  après 24 ans, puis 48 ans, puis 120 ans.

(b) Déterminer de quel pourcentage cette quantité diminue chaque année ?

(c) Après combien de temps a-t-elle été divisée par 10 ?

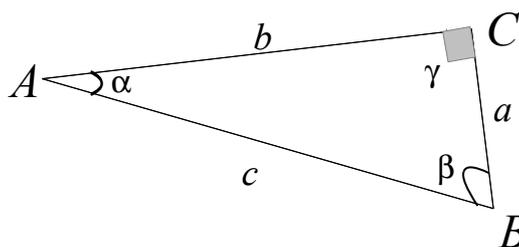
Exercice 6 (environ 7 points)

On considère le théorème de Pythagore : « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des cathètes »

Ci-dessous :

1. Ecrire dans chaque [.....] ce qui manque
2. Donner pour chaque CAR [.....] le ou les arguments qui manquent en vous basant sur l'annexe « Boîte à outils de géométrie » ou sur des arguments algébriques

(a) Illustrons par un schéma :

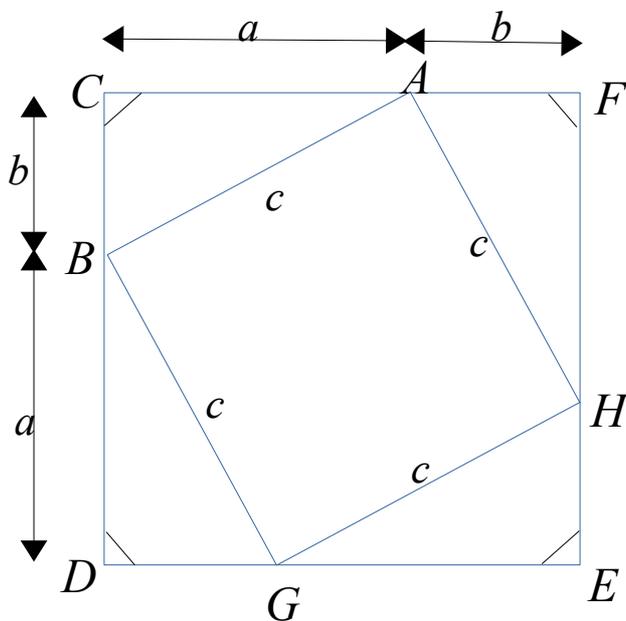


et reformulons sous forme d'une implication :

Si  $\Delta ABC$  est un triangle rectangle en [.....], alors on a : [.....] =  $c^2$

Démonstration :

on construit un carré  $CDEF$  de côté  $a+b$ , puis on considère le quadrilatère  $ABGH$  de côté  $c$  inscrit dans  $CDEF$  :



attention : à ce stade, on sait qu'il s'agit d'un losange CAR [.....] mais on n'a pas démontré qu'il s'agit aussi d'un carré ! C'est ce que nous allons maintenant démontrer ...

- on note  $\alpha = \angle BAC$ ,  $\alpha' = \angle AHF$ ,  $\beta = \angle CBA$ ,  $\beta' = \angle FAH$ ,  $\gamma = \angle HAB$
- dans les triangles  $\triangle ACB$  et  $\triangle AHF$  :  $\frac{HF}{CA} = \frac{AF}{CB} = \frac{AH}{BA} \Leftrightarrow \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = 1$   
le rapport des côtés est constant,  
donc les triangles  $\triangle ACB$  et  $\triangle AHF$  sont [.....], CAR [.....]  
donc  $\alpha = \alpha'$  et  $\beta = \beta'$ , CAR [.....]
- par ailleurs,  $\alpha + \beta + 90 = [.....]$ , CAR [.....]  
 $\Leftrightarrow \alpha + \beta = 90$ , CAR [.....]
- ainsi  $\alpha + \beta' = 90$ , CAR [.....]
- enfin :  $\alpha + \beta' + \gamma = 180$ , CAR [.....]  
 $\Leftrightarrow 90 + \gamma = 180$ , CAR [.....]  
 $\Leftrightarrow \gamma = [.....]$ , CAR [.....]
- un raisonnement identique montre que les 4 angles de  $ABGH$  valent  $90^\circ$
- les 4 côtés de  $ABGH$  sont de longueur égale à [.....], CAR [.....]
- On a : Aire( $CDEF$ ) = Aire( $ABGH$ ) + 4 Aire([.....])
- c'est-à-dire :  $(a+b)^2 = c^2 + 4(ab/2)$ , CAR [.....]  
 $\Leftrightarrow a^2 + 2[.....] + [.....] = c^2 + 2[.....]$   
 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$ , CAR [.....]

(b) Énoncer la réciproque du théorème de Pythagore

- (c) Facultatif : démontrer la réciproque du théorème de Pythagore en justifiant les étapes importantes

Indication : construire un point  $D$  tel que  $\triangle ACD$  soit rectangle en  $C$  et ...

*Exercice 7 (environ 5 points)*

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Pour être évaluées, vos réponses doivent être clairement et brièvement justifiées.

(a) Si  $a, x, y \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  et  $x < y$ , alors  $a^x \leq a^y$ .

(b)  $\log((2 + \sqrt{3})^{2016}) + \log((2 - \sqrt{3})^{2016}) = 0$

## Annexe : boîte à outils de géométrie

### Des notions fondamentales

- le plan, les points, les sous-ensembles de points ;
- l'appartenance, l'union et l'intersection ;
- les droites, demi-droites, segments, surfaces,
- distance entre deux points, longueur, aire, mesure d'un angle.

### Des définitions

- angle, angle plein [Déf « $\alpha$  plein»], angle plat [Déf « $\alpha$  plat»], angle droit [Déf « $\alpha$  droit»]
- angles complémentaires [Déf « $\alpha$  compl»], supplémentaires [Déf « $\alpha$  suppl»], opposés [Déf « $\alpha$  opp »], correspondants [Déf « $\alpha$  corr»], alternes-internes [Déf « $\alpha$  alt-int»]
- droites sécantes, parallèles [Déf «dr. par.»], perpendiculaires [Déf «dr. perp.»]
- triangle, côtés, sommets, côtés opposés ;
- triangle rectangle [Déf « $\Delta$  rect.», isocèle [Déf « $\Delta$  isoc»], équilatéral [Déf « $\Delta$  équi»] ;
- quadrilatère [Déf «quadrilatère»], trapèze [Déf «trapèze»], parallélogramme [Déf «parallélogramme»], rectangle [Déf «rectangle»], losange [Déf «losange»], carré [Déf «carré»] ;
- polygone (régulier), côtés, sommets
- côtés correspondants [Déf «côtés corr »], triangles semblables [Déf « $\Delta$  sembl »]
- cercle (centre, rayon), disque, secteur, longueur d'arc, angle au centre, angle inscrit

### Des notations

- angle :  $\widehat{ABC}$  ou  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \dots$
- triangle :  $\Delta ABC$  et les notations usuelles dans le triangle
- triangles semblables :  $\Delta ABC \sim \Delta A' B' C'$

### Des axiomes

- relation entre angles correspondants et parallélisme des droites qui les portent [Ax « $\alpha$  corr»]
- cas d'isométrie des triangles [Ax «C-C-C», Ax «C-A-C», Ax «A-C-A»]

### Des théorèmes démontrés

- sur les angles opposés [Thm « $\alpha$  opp»]
- relation entre angles alternes-internes et parallélisme des droites qui les portent [Thm « $\alpha$  alt-int»]
- somme angles d'un triangle [Thm « $\Sigma\alpha\Delta=180$ »]
- théorème de Thalès [Thm «Thales»] et sa contraposée [Thm «contr-Thales»]
- théorème de Pythagore [Thm «Pyth»] et sa contraposée [Thm «contr-Pyth»]
- théorème de la hauteur [Thm «hauteur»]
- théorème de Euclide [«Thm «Euclide»]
- théorème tangente au cercle [Thm «tg cercle»]
- théorème cercle de Thalès [Thm «cercle Thales»]
- théorème angles au centre et inscrit [Thm « $\alpha$  centre/inscrit»]
- théorème angles inscrits [Thm « $\alpha$  inscrits»]
- les côtés opposés d'un parallélogrammes sont de longueurs égales [thm «parallélogr.»]
- les diagonales d'un parallélogrammes se coupent en leurs milieux [thm «diag. parallélogr.»]
- angles dans un triangle isocèle [thm« $\Delta$  isoc»]
- angles dans un triangle équilatéral [thm« $\Delta$  équi»]
- réciproque du thm de Thalès [thm «récipr-Thales»] et sa contraposée [thm « contr-récipr-Thales»]
- réciproque du thm de Pythagore [thm «récipr-Pyth»] et sa contraposée [thm « contr-récipr-Pyth»]

### Des théorèmes non démontrés

- aires des quadrilatères [thm «aires»]
- relation mesure d'angle, longueur d'arc, aire du secteur dans un disque [thm «rel.  $\alpha$ /arc/sect»]

Annexe : aide-mémoire  
cercle trigonométrique

