Exercice 1 (environ 5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\log(x) + \log(x-3) = 1$.

(/5)

D: pb si $x \leq 0$
pb si $x-3 \leq 0$
$x \leq 3$

$D_f =]3;+\infty[$ /1

$\log(x) + \log(x-3) = 1 \Leftrightarrow \log(x(x-3)) = \log(10)$ log "bij"

$\Leftrightarrow x(x-3) = 10$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 0$

$x = 5$ ou $x = -2$
$\in D$ $\notin D$ /3

$S = \{5\}$ /1

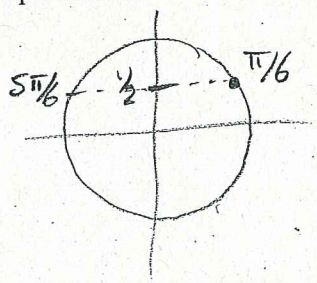
Exercice 2 (environ 6 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ puis identifier et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur le cercle trigonométrique fourni.

$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ /1

$\Leftrightarrow 2x=k2\pi$

$\Leftrightarrow x=k\pi$



ou $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{4\pi}{6}+k2\pi$

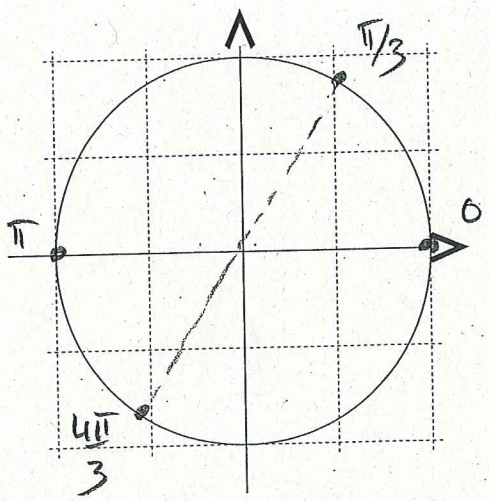
$=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

$S=\{k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}\}$

/4

$S_{[0;2\pi[}=\{0;\frac{\pi}{3};\pi;\frac{4\pi}{3}\}$

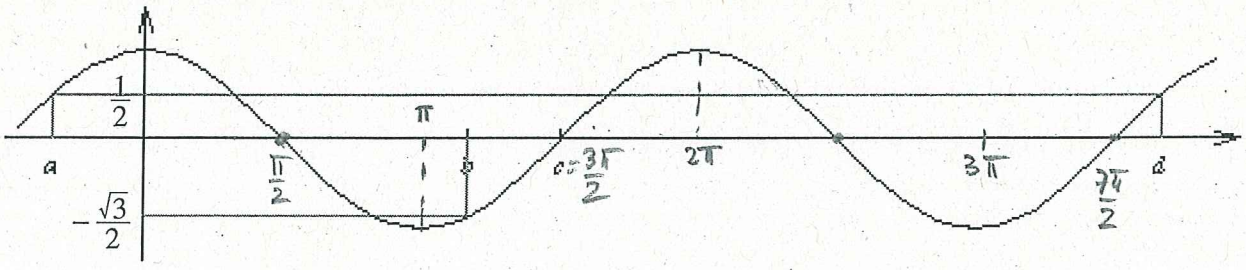


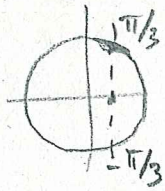
/1

Exercice 3 (environ 8 points)

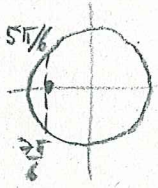
Voici une partie d'une représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=cos(x)$.

Déterminer les valeurs exactes de a, b, c et d.



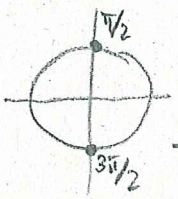


$\cos(a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \Rightarrow$ ici $\underline{a=-\frac{\pi}{3}}$ /2



$\cos(b)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow b=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

$\vee\ b=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \Rightarrow$ ici $\underline{b=\frac{7\pi}{6}}$ /2



$\underline{c=\frac{3\pi}{2}}$ /2

$\cos(d)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow d=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{13\pi}{3}$, ...

$\vee(a)$

$-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{11\pi}{3}$,

$d=\frac{11\pi}{3}$ /2

Ex 4

(a) Déterminer toutes les asymptotes de h.

$h(x) = \frac{3x-6+1}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2}$

as. vert : $x=2$

as. horiz : $y=3$

/2

(b) Résoudre l'inéquation $h(x) \geq 6$.

$h(x) \geq 6 \Leftrightarrow \frac{3x-5}{x-2} \geq 6 \Leftrightarrow \frac{3x-5-6(x-2)}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+7}{x-2} \geq 0$

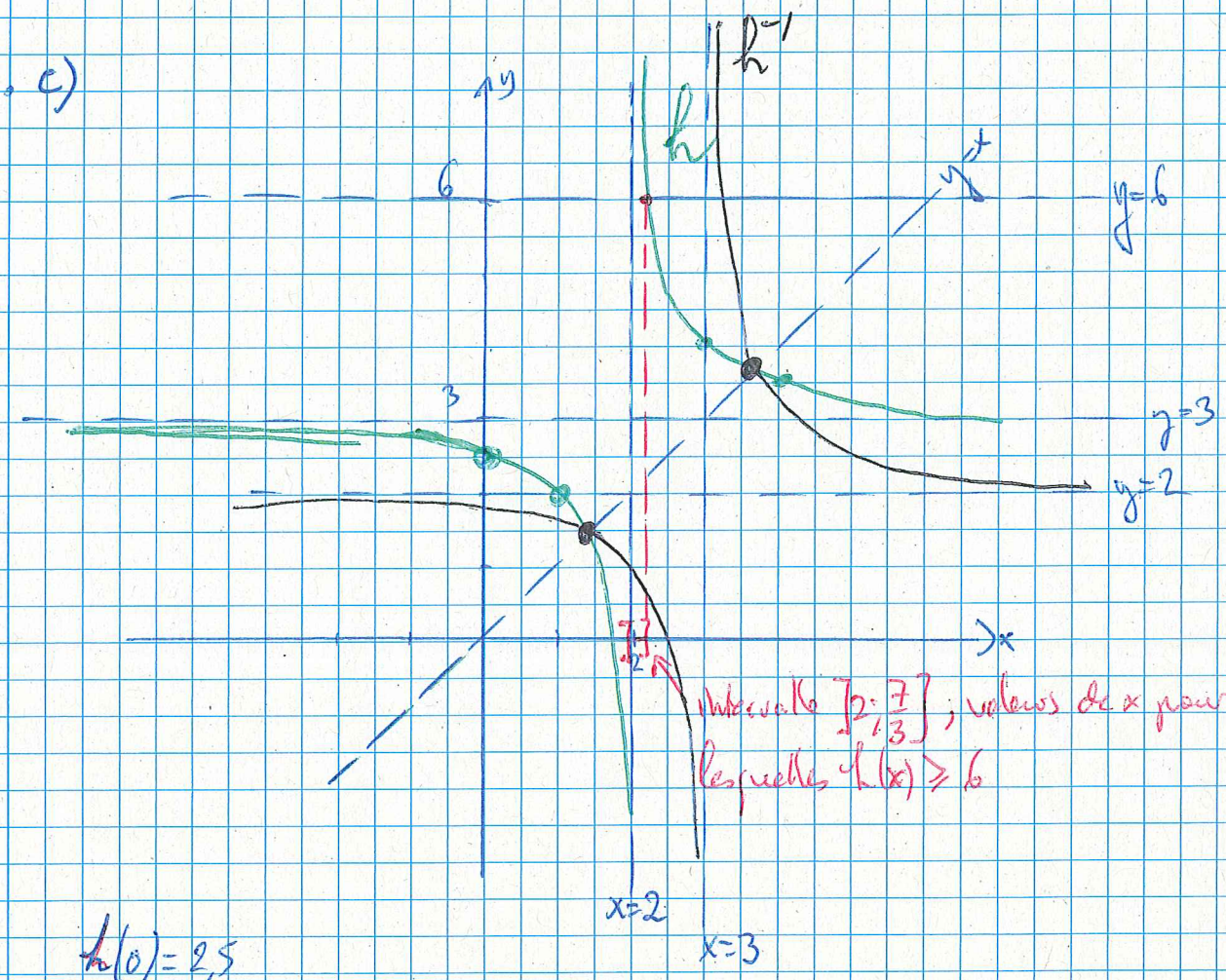
D: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

x		2		$7/3$	
$-3x+7$	+	+	+	0	−
$x-2$	−	0	+	+	+
	−	‖	+	0	−

/4

donc $S =]2; 7/3]$

c)



intervalle $]2; \frac{7}{3}]$; valeurs de x pour lesquelles $h(x) \geq 6$

$h(0) = 2,5$

$h(1) = 2$

$h(3) = 4$

$h(4) = 3,5$

(d) Déterminer les plus grands ensembles A et B pour que h soit bijective de A dans B.

$h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ /1

(e) Déterminer les fonctions composées $h \circ g$ et $g \circ h$ en simplifiant au maximum les réponses.

$$h \circ g(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{2x-5}{x-3}\right) = 3 + \frac{1}{\frac{2x-5}{x-3} - 2} = 3 + \frac{1}{\frac{\cancel{2x}-5-\cancel{2x}+6}{x-3}} = 3 + \frac{1}{\frac{1}{x-3}}$$

$$= 3 + x - 3 = x$$ /2

$$g \circ h(x) = g\left(3 + \frac{1}{x-2}\right) = \frac{2\left(3+\frac{1}{x-2}\right)-5}{3+\frac{1}{x-2}-3} = \frac{6+\frac{2}{x-2}-5}{3+\frac{1}{x-2}-3} = \frac{6x-\cancel{12}+\cancel{2}-5x+\cancel{10}}{\cancel{3x}-\cancel{6}+1-\cancel{3x}+\cancel{6}}$$

$$= x$$ /2

(f) Déterminer la fonction h^{-1} réciproque de h et la représenter graphiquement dans le même repère que h.

Selon e) : $h^{-1} = g$! /2

ou : $h(x) = y = 3 + \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow y - 3 = \frac{1}{x-2}$

$\Leftrightarrow (y-3)(x-2) = 1$

$\Leftrightarrow \cancel{y}\ x - 2 = \frac{1}{y-3}$

$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{1}{y-3} = \frac{2y-6+1}{y-3} = \frac{2y-5}{y-3}$

d'où $h^{-1}(y) = \frac{2y-5}{y-3}$

ou $h^{-1}(x) = \frac{2x-5}{x-3} = g(x)$

ex 5

/8

a) après 24 ans : divisé par 4 $\Rightarrow Q(24) = Q_0 \cdot \frac{1}{4} = Q_0 \cdot \frac{1}{2^2}$

diminution de 75%

après 48 ans : divisé par 2^4 $\Rightarrow Q(48) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = Q_0 \cdot \frac{1}{16}$

/2

diminution de 93,75%

après 120 ans : divisé par 2^{10} $\Rightarrow Q(120) = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = Q_0 \cdot \frac{1}{1024}$

diminution de $\frac{1023}{1024} \cong 99,9\%$

b) $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/12}$

après 1 année : $Q(1) = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{1/12} = Q_0 \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \cong Q_0 \cdot 0,9439$

/3

diminution de

environ $1 - 0,9439 = 0,0561 = 5,61\%$ par an

c) t pour que $Q_0/10 = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/12}$ $\quad Q_0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{1}{2}^{t/12}$

$\Leftrightarrow 2^{t/12} = 10$

$\Leftrightarrow \log(2^{t/12}) = \log(10)$

$\Leftrightarrow t/12 \cdot \log(2) = \log(10)$

/3

$\Leftrightarrow t = 12 \cdot \frac{\log(10)}{\log(2)} \cong 39,86$ années

Exercice 6 (environ 5 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Pour être évaluées, vos réponses doivent être clairement et brièvement justifiées.

(a) Si $a>0$ et $x<y$, alors $a^x < a^y$.

Faux : contre-exemple

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ y=2 \end{array}\right\} \quad \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\shortparallel}{\left(\frac{1}{2}\right)^1}} > \underset{\frac{1}{4}}{\underset{\shortparallel}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \; !$$

/2

(b) $log((2+\sqrt{3})^{2016}) + log((2-\sqrt{3})^{2016}) = 0$

Vrai : $\log[(2+\sqrt{3})^{2016}] + \log[(2-\sqrt{3})^{2016}]$

$= 2016 \log(2+\sqrt{3}) + 2016 \log(2-\sqrt{3})$

$= 2016 [\log(2+\sqrt{3}) + \log(2-\sqrt{3})]$

$= 2016 [\log((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))]$

$= 2016 [\log(4-3)]$

$= 2016 \cdot \underbrace{\log(1)}_{=0}$

$= 0$

/3