Exercice 1 (environ 10 points)

On considère le polynôme $P(x)=x^6+2x^5-2x^4+2x^3-3x^2$.

(a) Montrer que $Q(x)=x^3-x^2+x-1$ divise $P(x)$.

$P(x)=x^6+2x^5-2x^4+2x^3-3x^2=x^2(\underbrace{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}_{f(x)})$

$$\begin{array}{rl|l} & x^4+2x^3-2x^2+2x-3 & x^3-x^2+x-1 \\ - & x^4-x^3+x^2-x & \hline x+3 \\ \hline & 3x^3-3x^2+3x-3 & \\ - & 3x^3-3x^2+3x-3 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

donc $P(x)=x^2\cdot(\underbrace{x^3-x^2+x-1}_{Q(x)})(x+3)$

d'où $Q(x)\,|\,P(x)$

/4

(b) Déterminer toutes les solutions de l'équation $P(x)=0$.

Reste à factoriser $Q(x)$:

Méthode 1 : $Q(x)=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$

Méthode 2 : Candidats zéros $\mathbb{Z}$ de $Q(x)=\{\pm 1\}$

$Q(1)=0$

$$\begin{array}{rl|l} & x^3-x^2+x-1 & x-1 \\ - & x^3-x^2 & \hline x^2+1 \\ \hline & x-1 & \\ - & x-1 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

d'où $Q(x)=(x-1)(x^2+1)$

Enfin : $P(x)=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x^2+1)(x+3)=0$

$x^2=0$ ou $x-1=0$ ou $x^2+1=0$ ou $x+3=0$

$x=0$ $\quad x=1$ $\quad \emptyset$ $\quad x=-3$

$Z_P=\{-3;0;1\}$

/6

ex2

(a) Sans calculer aucune image autre que les zéros de f, déterminer quelles sont ces trois courbes en justifiant par un argument pour chacune.

IV $f(-4)=0$ sur la courbe alors que $f(-4)=0$ — /1

III : 0 est de multiplicité 2, $f(x)$ ne devrait donc pas changer de signe autour de 0 sur la courbe — /2

I : Si x est très grand, le signe de $f(x)$ est positif alors qu'il est négatif sur la courbe — /2

x		-4		0		5	
$\frac{1}{500}$	+	+	+	+	+	+	+
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$(x-5)^3$	−	−	−	−	−	0	+
$(x+4)$	−	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

(b) Quels arguments permettent d'affirmer que la courbe restante est une représentation plausible de f ?

II : les zéros sont corrects
les multiplicités sont respectées
les signes sont corrects [cf tableau de signes de $f(x)$ en (a)]

/3

Exercice 3 (environ 12 points)

Soient les fonctions f et g définies par $f(x)=6x-x^2$ et $g(x)=(x-1)^2+2$.

(a) Résoudre algébriquement l'inéquation $g(x)<f(x)$.

$6x-x^2 > (x-1)^2+2$

$\Leftrightarrow \quad 6x-x^2 > x^2-2x+1+2 \qquad \begin{array}{l}-6x\\+x^2\end{array}$

$\Leftrightarrow \quad 0 > 2x^2-8x+3$

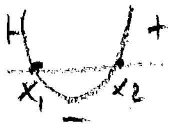
$\Delta = 64-4\cdot 2\cdot 3 = 40$

$x_{1,2} = \dfrac{8\pm\sqrt{40}}{4} = 2\pm\dfrac{\sqrt{40}}{4} = 2\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{4} = 2\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$x_1 = 2-\dfrac{\sqrt{10}}{2} \cong 0{,}42$

$x_2 = 2+\dfrac{\sqrt{10}}{2} \cong 3{,}58$

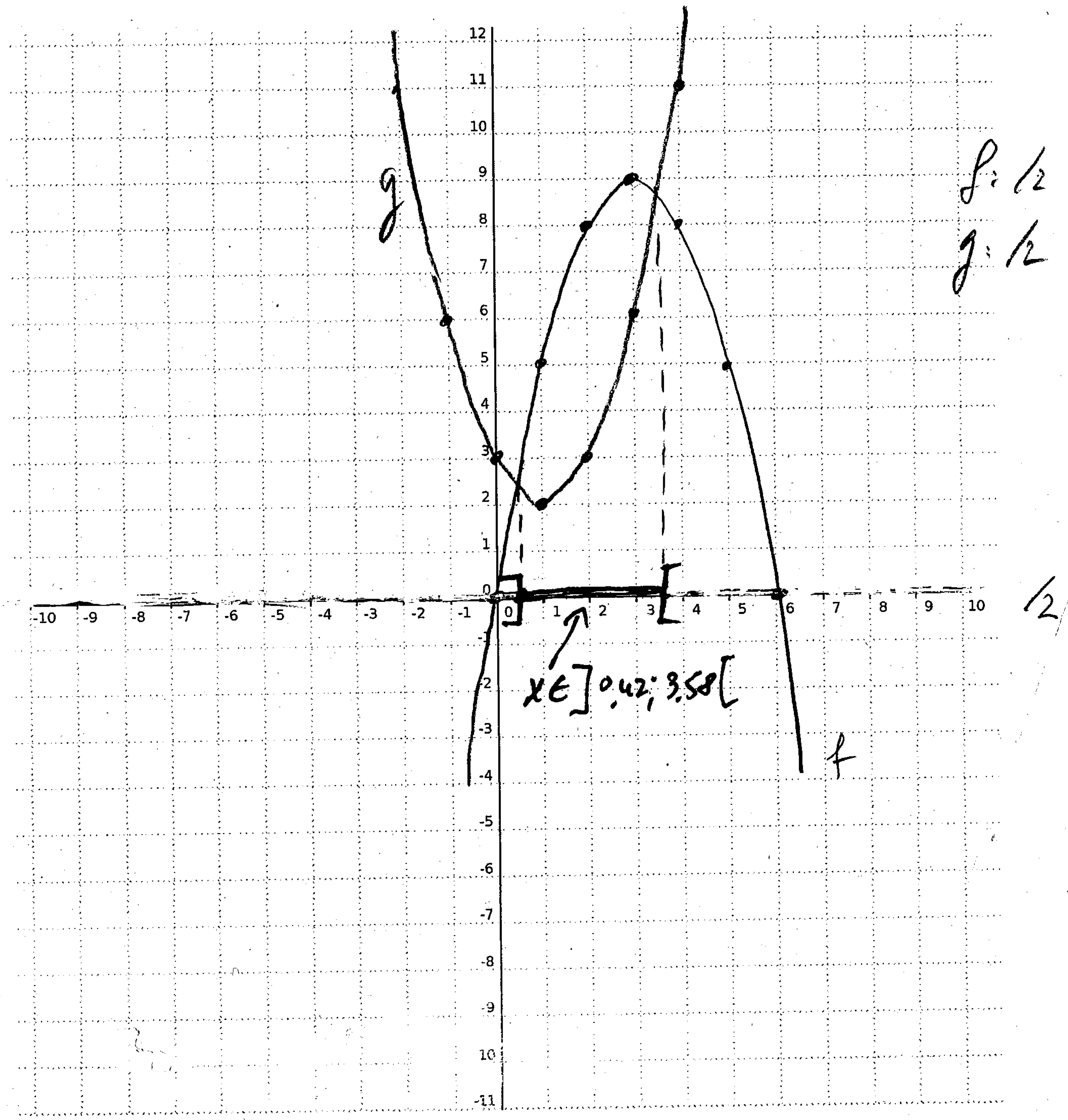
/6



x		x_1		x_2	
$2x^2-8x+3$	+	0	−	0	+

d'où $S = \left]2-\dfrac{\sqrt{10}}{2} ; 2+\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right[\cong \left]0{,}42 ; 3{,}58\right[$

(b) Sur le repère ci-dessous, représenter précisément f et g et interpréter graphiquement, en couleur, la réponse trouvée en **(a)**.



$f(x) = x(6-x) : Z_f = \{0;6\}$
$f(3) = 9$
$f(1) = 5$
$f(2) = 8$

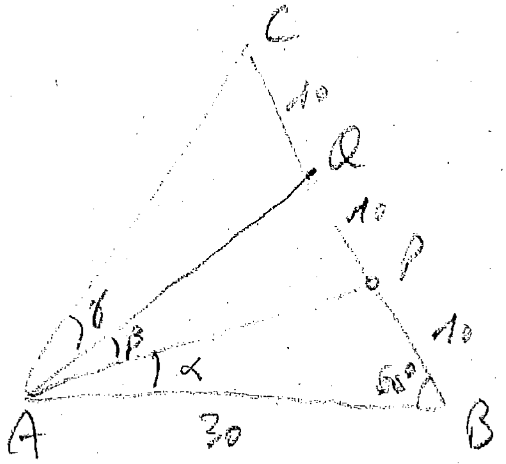
g : sommet $(1;2)$
$g(0) = 3$
$g(-1) = 6$
$g(4) = 11$

Exercice 4 (environ 8 points)

Léonard émet la conjecture suivante :

« Si ABC est un triangle équilatéral de 30 cm de côté, et si P et Q sont deux points sur le segment $[BC]$ tels que $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$, alors les angles $\widehat{BAP}$, $\widehat{PAQ}$ et $\widehat{QAC}$ sont égaux. »

A-t-il raison ? Justifier précisément.



/1

- Thm cos dans ΔABP : $\overline{AP}^2 = 30^2 + 10^2 - 2\cdot 30\cdot 10\cdot \cos(60)$
  $= 1000 - 600\cdot\frac{1}{2} = 700$
  $\Leftrightarrow \overline{AP} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}$ [cm] /3
- Thm sin dans ΔABP : $\frac{\sin(60)}{\overline{AP}} = \frac{\sin(\alpha)}{10} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{10\sqrt{3}/2}{10\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$
  d'où $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) \cong 19,11°$
  ou $180 - 19,11° = 160,89°$
  comme $\alpha < 60$, on a $\alpha \cong 19,11°$ /3
- Conclusion : $\alpha \neq 20°$, donc la conjecture est fausse.

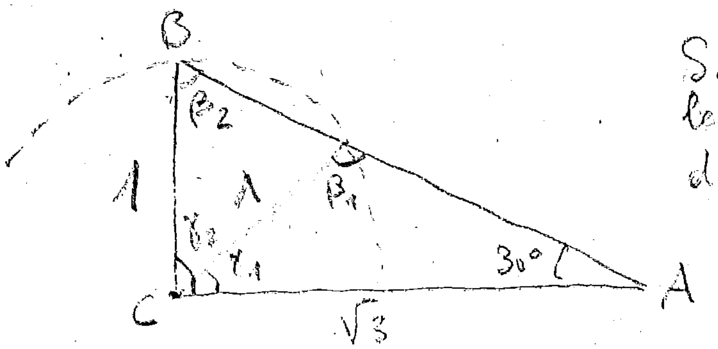
/1

Exercice 5 (environ 9 points)

Déterminer les longueurs et les angles de TOUS les triangles vérifiant les données suivantes :

$$a=1,\ b=\sqrt{3},\ \alpha=30°$$

Donner les solutions en valeurs exactes.



Situation C-A-C, mais avec les 2 côtés non adjacents à l'angle donc 2 solutions possibles !

Thm du sinus :

$$\frac{\sin(30)}{1} = \frac{\sin(\beta)}{\sqrt{3}}$$ /2

$$\Leftrightarrow \sin(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'où $\beta_2 = 60°$ ou $\beta_1 = 180-60 = 120°$ /2

$\gamma_1 = 180-120-30 = 30°$ /2

le ΔABC est isocèle !

donc $\overline{BC} = \overline{AB} = 1$

$\gamma_2 = 180-60-30 = 90°$

le ΔABC est rectangle !

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$$

$\overline{AB} = 2$

/3

Exercice 6 (environ 12 points)

Un terrain se trouve en bordure d'une rivière rectiligne.

On désire délimiter une zone rectangulaire le long de la rivière à l'aide d'une barrière ayant une longueur totale de 120 mètres. Le côté de la zone le long de la rivière n'a pas besoin de barrière.

(a) Esquisser un croquis de cette situation.

/1

(b) Exprimer l'aire de la zone rectangulaire à l'aide d'une fonction d'une seule variable.

$A = xy$ et $2x + y = 120$

$\Leftrightarrow y = 120 - 2x$

d'où $A(x) = x(120 - 2x) = 2x(60 - x)$ /4

(c) Quelle est l'aire maximale possible de la zone délimitée par la barrière et la rivière ?

A de degré 2

$Z_A = \{0 ; 60\}$

axe : $x = 30$

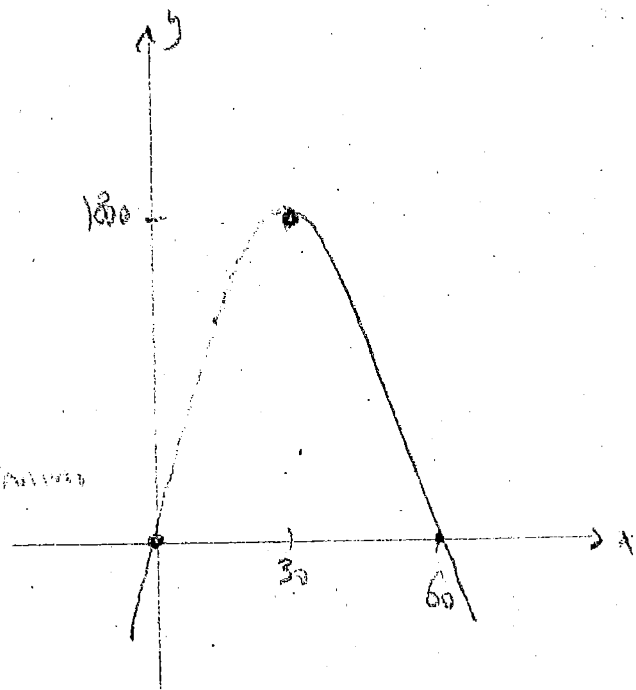
sommet : $f(30) = 1800$

$S = (30 ; 1800)$

$a = -2$, donc $\cap$

le sommet est un maximum

$A(30) = 1800 [m^2]$

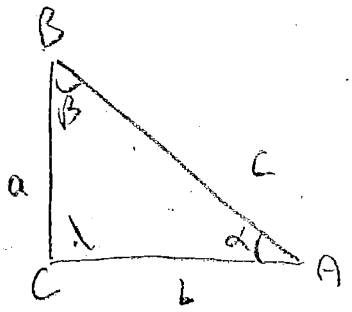


/7

Exercice 7 (environ 8 points)

Vrai ou faux? Justifier par un calcul ou un raisonnement.

(a) Si ABC est un triangle rectangle en C, on a $\dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{\sin(\widehat{ABC})}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.



ARG1: thm sinus: $\dfrac{\sin(90)}{c} = \dfrac{\sin(\beta)}{b} = \dfrac{\sin(\alpha)}{a}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{\sin(\widehat{ABC})}{\overline{AC}} = \dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{\overline{BC}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\sin(\widehat{BAC})}{\sin(\widehat{ABC})}$ c.q.f.d.

ARG2: Δ rectangle
donc
$\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c}$ et $\sin(\beta) = \dfrac{b}{c}$

$\Leftrightarrow c = a\sin(\alpha)$ et $c = b\sin(\beta)$

d'où $a\sin(\alpha) = b\sin(\beta)$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$ qfd

4

(b) Si $x \in \mathbb{R}$ et $x^3 > x$, alors $x > 1$.

Hyp: $x^3 > x$
$\Leftrightarrow x^3 - x > 0$
$\Leftrightarrow x(x^2-1) > 0$

x		-1		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x^2-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S =]-1;0[\cup]1;+\infty[$

c'est faux, contre-exemple: $x = -\frac{1}{2}$

$(-\frac{1}{2})^3 > -\frac{1}{2}$, car $-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$, mais $-\frac{1}{2} \leq 1$!

4