Travail de mathématiques n°3

Date : 14 mars 2016

Durée : 90'

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 2Ma2DF01

Matériel autorisé
- Calculatrice personnelle non programmable et non graphique

Remarques
- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ....

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ .... / 1

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ .... / 1

Total des points des exercices : .... / ....

Total des points de l'épreuve : .... / ....

Note : / 6

Début du travail

[/8] Exercice 1 (environ 8 points)

(a) Simplifier au maximum :

$\sqrt[8]{2187}\cdot\sqrt[8]{3} = \sqrt[8]{2187\cdot 3} = \sqrt[8]{3^7\cdot 3} = \sqrt[8]{3^8} = 3$ /3

(b) Rendre rationnel le dénominateur des nombres suivants et simplifier au maximum :

i. $\frac{2}{3\sqrt{12}} = \frac{2}{3\sqrt{12}}\cdot\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{12}}{3\cdot\cancel{12}\,6} = \frac{\sqrt{4\cdot 3}}{18} = \frac{2\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ /2

ii. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5})^2-3\sqrt{2}\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{5}+(\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3\cdot 5-4\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{9\cdot 5-2}$ /3

$= \frac{17-4\sqrt{10}}{43}$

Exercice 2 (environ 15 points)

On considère la fonction réelle f définie par $f(x)=(1-x)^2+2$.

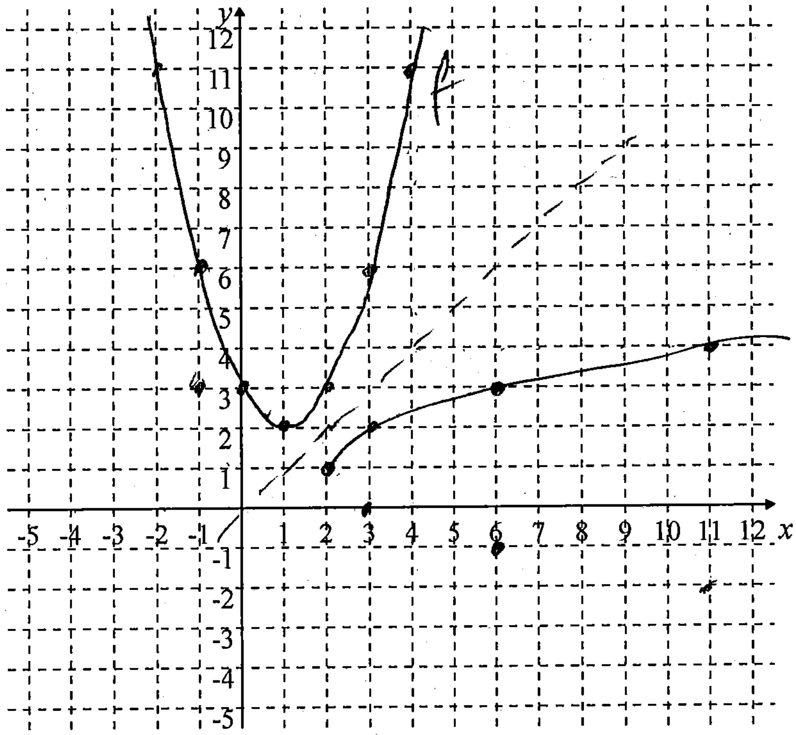
(a) Exprimer f comme composition de fonctions élémentaires en choisissant parmi les fonctions suivantes: $a(x)=x+2$, $b(x)=x-2$, $c(x)=x^2$, $d(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=1-x$.

$$\underbrace{x \xrightarrow{h} 1-x \xrightarrow{c} (1-x)^2 \xrightarrow{a} (1-x)^2+2}_{f}$$

/3

$$f(x) = a \circ c \circ h(x) = a(c(h(x)))$$

(b) Représenter graphiquement f avec précision sur le repère ci-dessous :



/2 pour f

(c) $f: R \to R$ est-elle bijective ? Si oui, justifier, si non, justifier puis déterminer A et B les plus grands possibles pour que $f: A \to B$ soit bijective.

- non, car 3, par exemple, a 2 préimages 0 et 2 /2
- $f: [1; +\infty[\to [2; +\infty[$ est bij /2

(d) Déterminer f^{-1} (y) : $y=(1-x)^2+2 \Leftrightarrow y-2=(1-x)^2$

$\Leftrightarrow 1-x = \pm\sqrt{y-2} \Leftrightarrow x = 1 \mp \sqrt{y-2}$ /4

$\hookrightarrow f^{-1}(y) = 1+\sqrt{y-2} : [2;+\infty[\to [1;+\infty[$

(e) Représenter graphiquement f^{-1} sur le même repère qu'en (b).

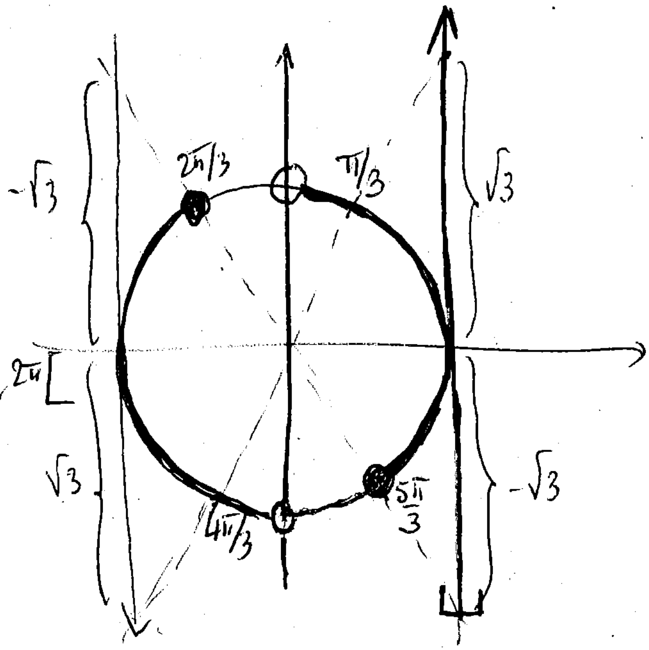
/2 pour f^{-1}

Exercice 3 (environ 8 points)

(a) Résoudre $8^{3x+1}=\frac{1}{2^{x-2}}$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Résoudre $\tan(x)\geq-\sqrt{3}$ dans $[0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

$S=[0;\frac{\pi}{2}[\cup[\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{2}[\cup[\frac{5\pi}{3};2\pi[$



/5

Exercice 4 (environ 6 points)

Si un fonds d'épargne rapporte un intérêt de 10% annuel capitalisé semestriellement, quelle somme d'argent investie produira la somme de 5000 fr. après 3 ans ?

Exercice 3 (environ 8 points)

(a) Résoudre $8^{3x+1}=\frac{1}{2^{x-2}}$ dans $\mathbb{R}$.

$$8^{3x+1}=2^{(-x+2)} \Leftrightarrow (2^3)^{3x+1}=2^{-x+2} \Leftrightarrow 2^{9x+3}=2^{-x+2}$$

$$\Leftrightarrow 9x+3=-x+2$$

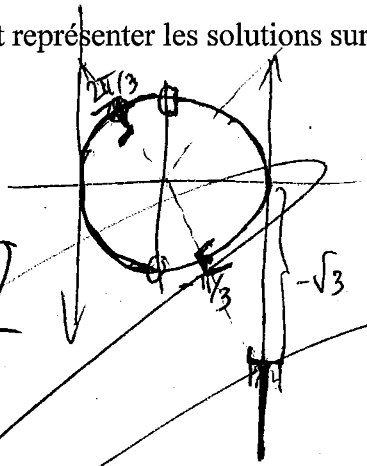
$$\Leftrightarrow 10x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{10} \qquad S=\left\{-\frac{1}{10}\right\}$$

/3

(b) Résoudre $\tan(x) \geq -\sqrt{3}$ dans $[0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

$$S=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right[$$



/5

Exercice 4 (environ 6 points)

Si un fonds d'épargne rapporte un intérêt de 10% annuel capitalisé semestriellement, quelle somme d'argent investie produira la somme de 5000 fr. après 3 ans?

$$C_n=C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{tn} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} C_0=? \\ C_n=5000 \\ t=3 \\ n=2 \\ i=0{,}1 \end{array}$$

/4

$$\text{d'où } 5000=C_0\left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow 5000=C_0(1{,}05)^6$$

$$\Leftrightarrow C_0=\frac{5000}{(1{,}05)^6} \simeq 3731.-10$$

/2

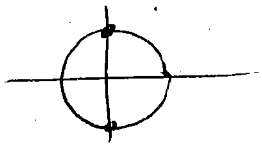
Exercice 5 (environ 18 points)

On considère la fonction f déterminée par $f(x) = -4\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

(a) Déterminer l'ensemble des zéro(s) Z_f de f.

$-4\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$



$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ /3

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

(b) Déterminer la période (on ne demande pas de calcul).

$P = \pi$, car celle de cos est 2π et on a $\cos(\underline{2}x \ldots)$ /2

$A = 4$

(c) Calculer les images de 0, $\frac{\pi}{3}$ et 2π et donner la réponse sous forme exacte simplifiée au maximum.

$f(0) = -4\cos(\frac{\pi}{3}) = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2$

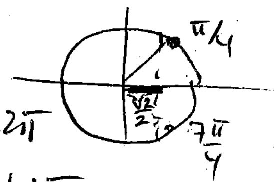
$f(\frac{\pi}{3}) = -4\cos(\frac{3\pi}{3}) = -4(-1) = 4$

$f(2\pi) = -4\cos(4\pi + \frac{\pi}{3})$ /2

$= -4\cos(\frac{\pi}{3}) = -2$

(d) Résoudre $f(x) = -2\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ et (idem) représenter les solutions comprises dans $[0; 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique ci-dessous :

$-4\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{4} + k2\pi$

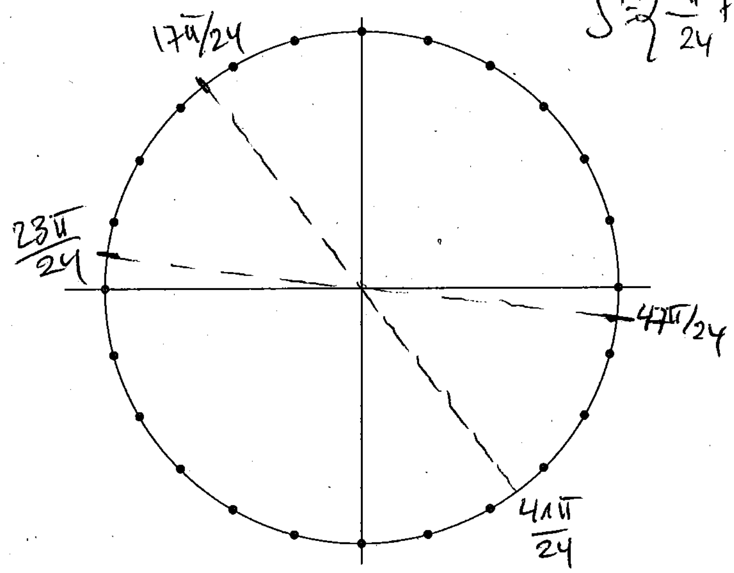
$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $2x = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ ou $2x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$ ou $x = \frac{17\pi}{24} + k\pi$

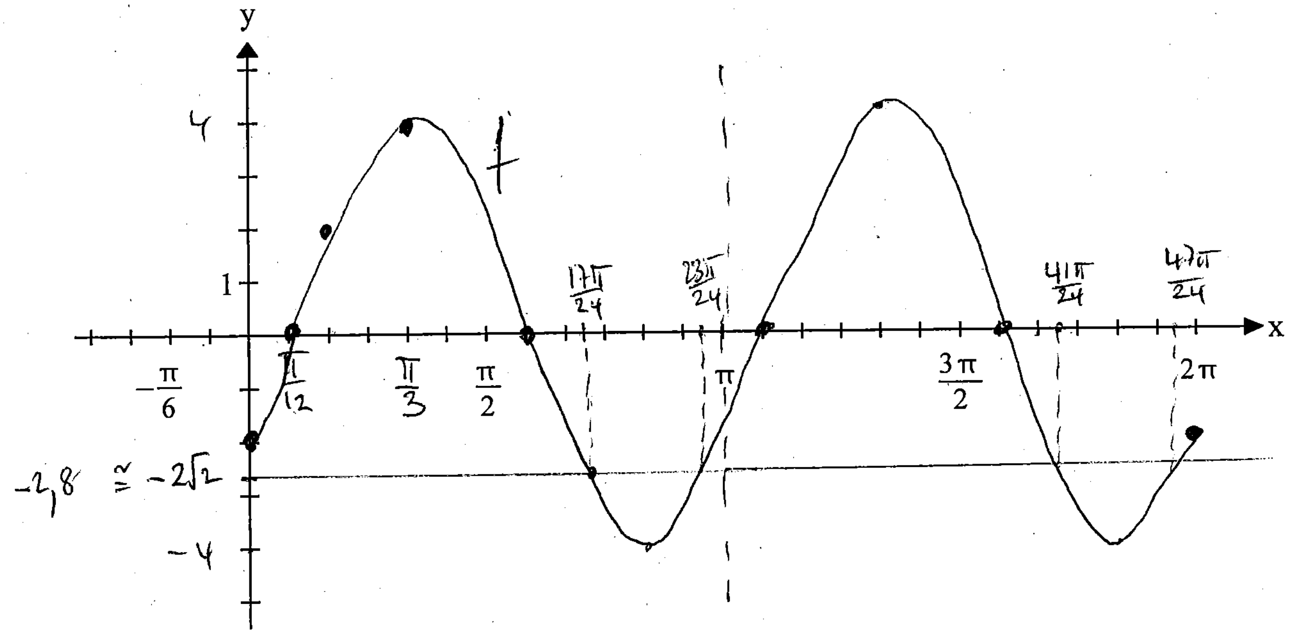
$S = \{ -\frac{\pi}{24} + k\pi ; \frac{17\pi}{24} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

/4



/2

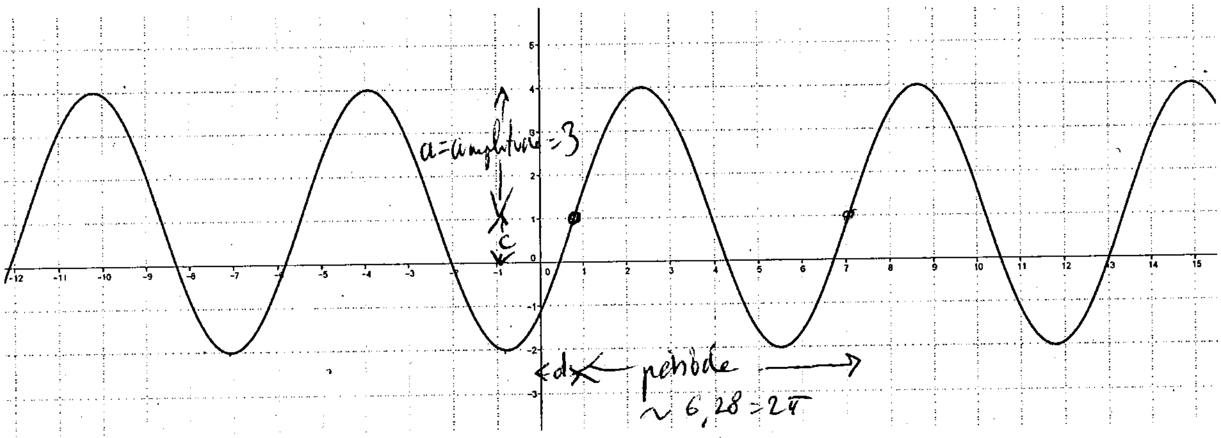
(e) Représenter graphiquement f ci-dessous sur l'intervalle $[0;2\pi[$ en reportant toutes les informations récoltées jusque-là.



/5

Exercice 6 (FACULTATIF : max environ + 5 points)

Déterminer l'expression algébrique d'une fonction f dont la représentation graphique corresponde aussi précisément que possible à la courbe sinusoïdale suivante, en explicitant clairement les choix :



$f(x) = a \cdot \sin(x - d) + c$

$\cong 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ (rem : $\frac{\pi}{4} \cong 0,79$)

ou $\cong 3 \sin(x - 0,8) + 1$