Exercice 22

(a) $f(x)=x^3+5x^2-2x-24$

On cherche les zéros rationnels de la forme $\frac{c}{d}$ avec $c\in D_{24}=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm12;\pm24\}$

et $d\in D_1=\{\pm1\}$ .

| d\c | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +-1/1 | +-2/1 | +-3/1 | +-4/1 | +-6/1 | +-12/1 | +-24/1 |

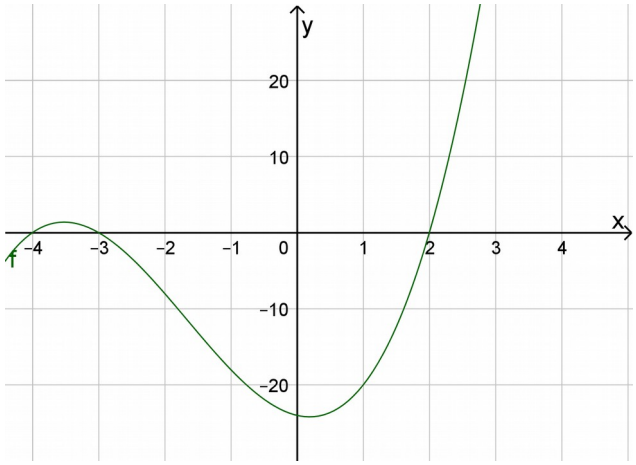
[thm zéros rationnels à coeff entiers]

On remarque $f(2)=f(-3)=f(-4)=0\Rightarrow Z_f=\{-4;-3;2\}$

On a 3 zéros et $f$ est de degré 3, donc $f(x)=(x-2)(x+3)(x+4)$

Tableau de signes :

| | | -4 | | -3 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $(x+3)$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $(x+4)$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $f(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |




(b) $g(x)=6x^4+5x^3-17x^2-6x=x\underbrace{(6x^3+5x^2-17x-6)}_{=j(x)}$

On cherche les zéros rationnels de $j$ de la forme $\frac{c}{d}$ avec $c,d\in D_6=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$

| c/d | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | +-1/1 | +-2/1 | +-3/1 | +-6/1 |
| 2 | +-1/2 | ~~+-2/2~~ | +-3/2 | ~~+-6/2~~ |
| 3 | +-1/3 | +-2/3 | ~~+-3/3~~ | ~~+-6/3~~ |
| 6 | +-1/6 | ~~+-2/6~~ | ~~+-3/6~~ | ~~+-6/6~~ |

[thm zéros rationnels à coeff entiers]

On barre les répétitions d'un même nombre.

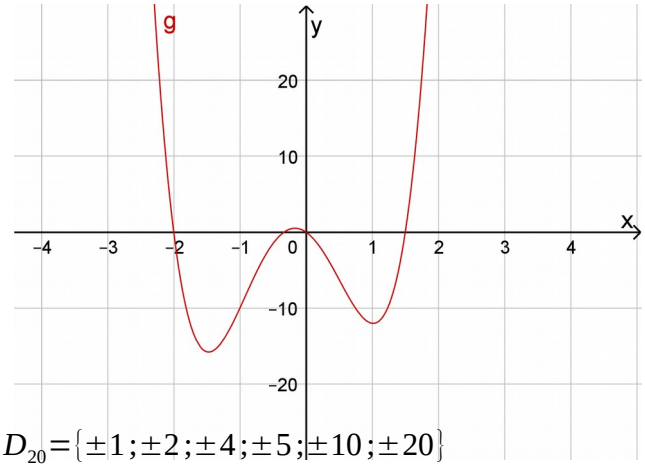
On trouve les 4 zéros de $g$ qui est de degré 4 :

$Z_g=\{-2;-\frac{1}{3};0;\frac{3}{2}\}$ et donc $g(x)=6x(x+\frac{1}{3})(x+2)(x-\frac{2}{3})=x(3x+1)(x+2)(2x-3)$

Tableau de signes :


CC BY NC SA

| $x$ | | -2 | | - 1/3 | | 0 | | 3/2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $(3x+1)$ | - | - | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $(x+2)$ | - | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| $(2x-3)$ | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $g(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |




(c) $h(x)=3x^3-x^2+11x-20$

On cherche les zéros rationnels de la forme $\frac{c}{d}$ avec $c\in D_{20}=\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm5;\pm10;\pm20\}$

$d\in D_3=\{\pm1;\pm3\}$ :

| d\c | 1 | 2 | 4 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +-1/1 | +-2/1 | +-4/1 | +-5/1 | +-10/1 | +-20/1 |
| 3 | +-3/1 | +-2/3 | +-4/3 | +-5/3 | +-10/3 | +-20/3 |

[thm zéros rationnels à coeff entiers]

On trouve uniquement $h(\frac{4}{3})=0$ et $h$ possède donc un unique zéro rationnel.

Cependant, $h$ pourrait avoir des zéros irrationnels. Il est donc nécessaire de faire la division polynomiale :

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -x^2 & -11x & -20 & x-4/3 \\
-(3x^3 & -4x^2) & & & \overline{3x^2+3x+15} \\
= & 3x^2 & +11x & -20 & \\
 & -(-3x^2 & -4x) & & \\
= & & 15x & -20 & \\
 & & -(15x & -20) & \\
= & & & 0 &
\end{array}$$

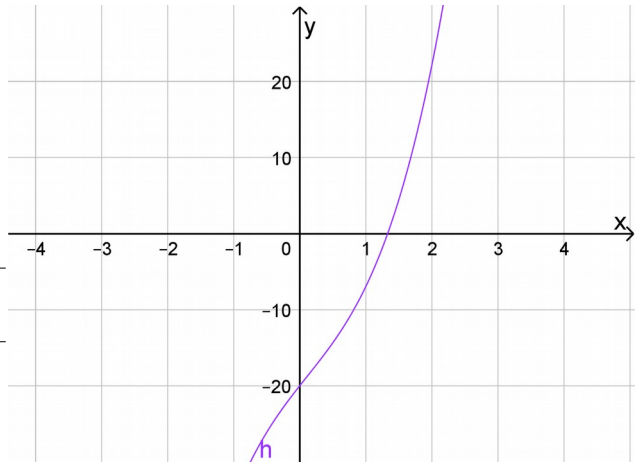
Donc $h(x)=3x^3-x^2+11x-20$

$$=(x-\frac{4}{3})(3x^2+3x+15)$$

$$=(3x-4)\underbrace{(x^2+x+5)}_{\text{non facto car } \Delta=-19}$$

Tableau de signes :

| | | 4/3 | |
|---|---|---|---|
| $(3x-4)$ | - | 0 | + |
| $(x^2+x+5)$ | + | + | + |
| $h(x)$ | - | 0 | + |





CC BY NC SA

Exercice 23

(a) $f(x)=a(x-1)(x+1)$

$f(0)=1 \Leftrightarrow a(0-1)(0+1)=1 \Leftrightarrow a=-1$ donc $f(x)=-(x-1)(x+1)$

(b) $f(x)=a(x-1)(x+1)(x-2)$

$f(0)=-4 \Leftrightarrow a(0-1)(0+1)(0-2)=-4 \Leftrightarrow a=-2$ donc $f(x)=-2(x-1)(x+1)(x-2)$

Exercice 24

$f(x)=(x-1)^3$ un zéro de multiplicité 3 → courbe rouge

$g(x)=x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$ 3 zéros de multiplicité 1 → courbe bleue

$h(x)=x(x+1)^2$ 2 zéros : 0 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2 → courbe verte.


CC BY NC SA

Exercice 25

(a) $P(x)=4x^4+12x^3+9x^2-2x-3$

On cherche les zéros rationnels de la forme $\frac{c}{d}$ avec $c\in D_3=\{\pm1;\pm3\}$ et $d\in D_3=\{\pm1;\pm2;\pm4\}$

| d\c | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 1 | +-1/1 | +-3/1 |
| 2 | +-1/2 | +-3/2 |
| 4 | +-1/4 | +-3/4 |

[thm zéros rationnels à coeff entiers]

On trouve $P(-1)=P(\frac{1}{2})=P(-\frac{3}{2})=0$ donc $P(x)$ est divisible par $(x+1),(x-\frac{1}{2})$ et $(x+\frac{3}{2})$

Donc $P(x)$ est aussi divisible par $(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})=(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})=x^3+2x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

Donc $P(x)$ est aussi divisible par $4x^3+8x^2+x-3$ et on effectue alors la division polynomiale suivante :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 4x^4 & +12x^3 & +9x^2 & -2x & -3 & \frac{4x^3+8x^2+x-3}{x+1} \\
 & -(4x^4 & +8x^3 & +x^2 & -3x) & & \\
= & & 4x^3 & +8x^2 & +x & -3 & \\
 & & -(4x^3 & +8x^2 & +x & -3) & \\
= & & & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi $P(x)=4(x+1)^2(x-\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$

(b) Tableau de signes :

| | | -3/2 | | -1 | | 1/2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4(x+1)^2$ | + | + | + | 0 | + | + | + |
| $(x-1/2)$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $(x+3/2)$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $P(x)$ | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + |

Ainsi $\{x\in\mathbb{R}|P(x)<0\}=]-\frac{3}{2};-1[\cup]-1;\frac{1}{2}[$


CC BY NC SA

Exercice 26

(a) Faux car $f$ ne change pas de signe vers $-3$ et $-1$. Ainsi la multiplicité des zéros $-3$ et $-1$ est paire et donc au moins de 2. Il en résulte que $f$ est une fonction polynomiale de degré 6 au moins.

(b) Vrai car $-3 \in Z_f$ et $-3$ est un zéro de multiplicité paire (donc au moins 2) ainsi $f$ est au moins divisible par $(x+3)^2$.

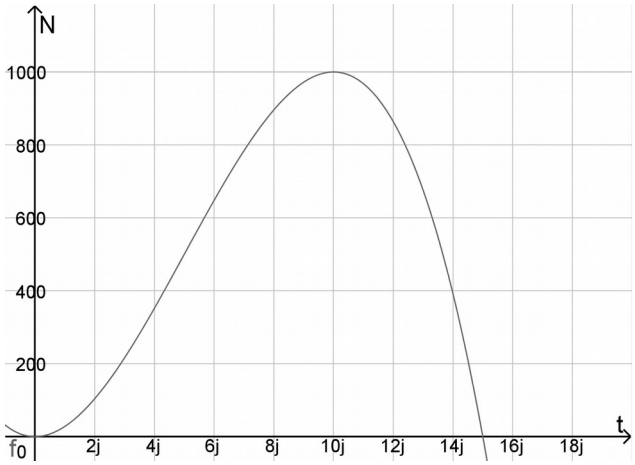
(c) Faux car $f(-2)<0$ et $f(-2)$ est le reste de la division de $f(x)$ par $(x+2)$.

(d) Faux car les coefficients de $g$ ne sont pas des nombres entiers et donc le théorème des zéros rationnels n'est pas applicable.

Exercice 27

(a) Soit $N(t)$ le nombre de bactéries en fonction du temps en jours.

On observe $N(10)=1000, N(15)=0$ et on suppose $N(0)=0$ et on a :




(b) Autour de 0 : monte *lentement* donc 0 de multiplicité 2

Autour de 15 : descend *brusquement* donc 15 de multiplicité 1. Donc $Z_N=\{0;15\}$

(c) $N(t)=at^2(t-15)$ et $N(10)=1000 \Leftrightarrow a10^2(10-15)=1000 \Leftrightarrow -500a=1000 \Leftrightarrow a=-2$

Donc $N(t)=-2t^2(t-15)$

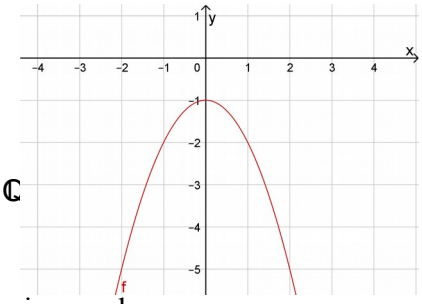
(d) $N(5)=-2\cdot 5^2(5-15)=500$

Exercice 28

(a) Faux. Contre-exemple : $f(x)=x^2+1$ est de degré $n=2$ mais ne possède aucun zéro.

(b) Faux. Contre-exemple : Théorème du reste nul : Si $f(c)=0$ alors $(x-c)$ divise $f(x)$
Réciproque : Si $(x-c)$ divise $f(x)$ alors $f(c)=0$ (vraie).

(c) Faux. Contre-exemple : $f(x)=-x^2$ mais $f^{-1}(2)=\emptyset$ car $-x^2=2$ ne possède aucune solution.




(d) Faux. Contre-exemple : $f(x)=-x^2-1$ est de degré 2 et $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

(e) Fausse. Contre-exemple : $f(x)=\sqrt{2}x$ est de pente $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

(f) Fausse. Contre-exemple : $a=1, b=1 \Rightarrow f(x)=x^3+x+1$ et

(g) Vraie. Par définition, une fonction possède au maximum une image donc $f(a)=-f(a)\Rightarrow f(a)=0$ . Par définition, $a$ est donc un zéro de $f$ .

(h) Fausse. Contre-exemple : $A(x)=x(x^2+1)$ est de degré 3 et possède une seule racine qui est 0.

(i) Vraie. Soit $A(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$ et $B(x)=ex^2+fx+g, e\neq 0$ (deux polynômes de degré respectivement 3 et 2).

Alors $A(x)B(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)(ex^2+fx+g)=aex^5+(af+be)x^4+...+dg$ est bien de degré 5 car $ea\neq 0$ .

(j) Vraie. $B(x)$ divise $A(x)\Rightarrow A(x)=B(x)q(x)\Rightarrow [A(x)]^2=[B(x)q(x)]^2\Rightarrow [A(x)]^2=[B(x)]^2[q(x)]^2$
$\Rightarrow [B(x)]^2$ divise $[A(x)]^2$

(k) Vraie. Par le théorème du sommet, on a $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot 2}=1$ et $f(1)=2\cdot 1^2-4\cdot 1+4=2$ .


CC BY NC SA