Théorème

Soit $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2 x^2+a_1 x+a_0$ une fonction polynomiale **à coefficients entiers** (c'est-à-dire que $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$)

Si $\dfrac{c}{d}$ est un **zéro rationnel** de $f(x)$ avec c et d sans facteur commun, alors :

a) le numérateur c du zéro est un diviseur de a_0

b) le dénominateur d du zéro est un diviseur de a_n

2. Dans la démonstration ci-dessous, donner les arguments qui manquent et compléter lorsque c'est nécessaire :

Démonstration de a) :

- $\dfrac{c}{d}$ est un zéro de f , car [ARG 1: ....]
- donc $f(\dfrac{c}{d})$ = [............], car [ARG 2: ....]
- càd que :
$$a_n\left(\frac{c}{d}\right)^n+a_{n-1}[........]^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{c}{d}\right)^{n-2}+\ldots+a_2\left(\frac{c}{d}\right)^2+[........]\left(\frac{c}{d}\right)+a_0=0$$
car [ARG 3: ....]
- d'où $$a_n\left(\frac{c^n}{d^n}\right)+a_{n-1}\left(\frac{[........]^{n-1}}{[........]^{n-1}}\right)+a_{n-2}\left(\frac{c^{n-2}}{d^{n-2}}\right)+\ldots+a_2\left(\frac{c^2}{d^2}\right)+[........]\left(\frac{c}{d}\right)+a_0=0$$
car [ARG 4: ....]
- d'où
$$a_n c^n+a_{n-1}[........]^{n-1}d+a_{n-2}c^{n-2}d^2+\ldots+a_2 c^2 d^{n-2}+a_1 c\, d^{n-1}+[........]d^n=o$$
car [ARG 5: ....]
- d'où
$$a_n c^n+a_{n-1}[........]^{n-1}d+a_{n-2}c^{n-2}d^2+\ldots+a_2 c^2 d^{n-2}+a_1 c\, d^{n-1}=-[........]d^n$$
car [ARG 6: ....]
- d'où
$$c\cdot\left(a_n c^{n-1}+a_{n-1}[........]^{n-2}d+a_{n-2}c^{n-3}d^2+\ldots+a_2 c\, d^{n-2}+a_1 d^{n-1}\right)=-[........]d^n$$
car [ARG 7: ....]

- on en déduit que c est un diviseur de $-a_0 d^n$

  car [ARG 8: ....]

  ○

- et donc que c est un diviseur de [............]

  car [ARG 9: ....]

3. Que modifier à cette démonstration pour en faire une démonstration du point b) ?