Logarithmes

Etant **bijective** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, une fonction exponentielle de base a admet une **fonction réciproque**, également bijective mais de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ qui est appelée **logarithme de base *a*.**

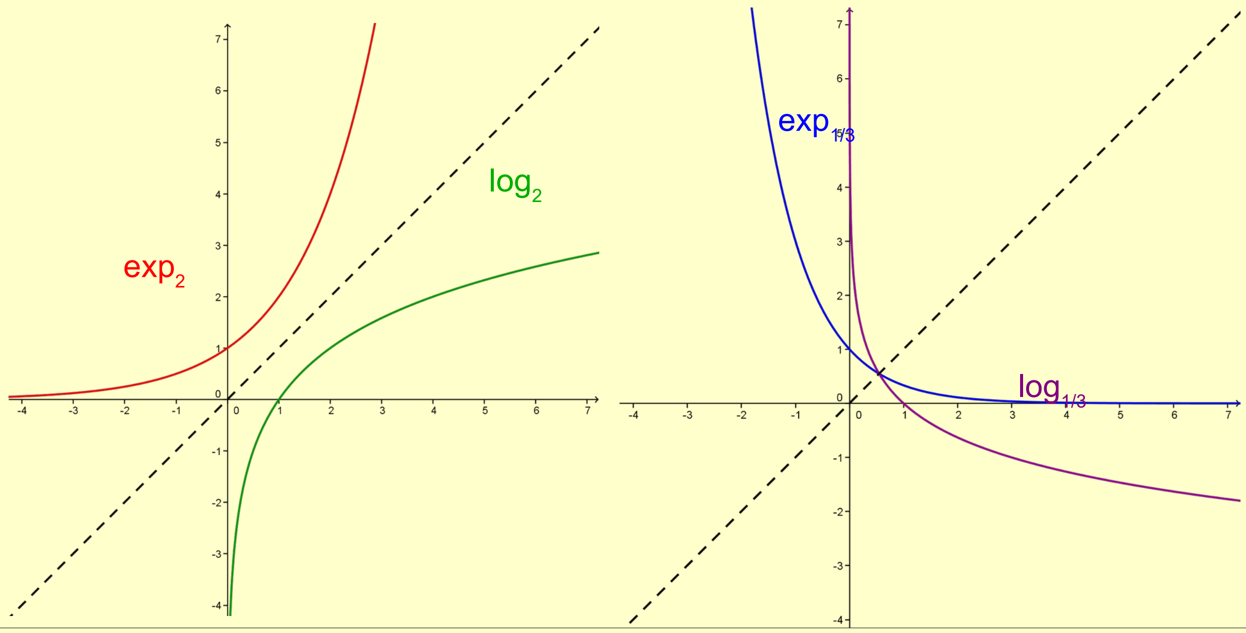
Définition « Fonction logarithme de base *a* »

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$: $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$x \to \log_a(x)$

où $\log_a(x)$ vérifie la condition $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$

$\log_{10}$ se note plus simplement log, et $\log_e$ est appelé **logarithme naturel**



Théorèmes « Propriétés des logarithmes »

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$; alors on a : $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

$a^{\log_a(x)} = x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^*$; alors on a : $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$

$\log_a(u^c) = c \cdot \log_a(u), \forall c \in \mathbb{R}$

$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$

$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Ces fonctions permettent de modéliser des phénomènes à faible croissance ($a > 1$).

Equations logarithmiques – exemple

Résoudre $\log_7(x-5)+\log_7(x+1)=1$
On détermine le domaine de définition de l'équation: $x>5$ et $x>-1$, donc $D=]5;+\infty[$
puis on résout en utilisant les propriétés des logarithmes :

$$\begin{aligned}
\log_7(x-5)+\log_7(x+1)=1 &\Leftrightarrow \log_7(x-5)+\log_7(x+1)=\log_7(7)\\
&\Leftrightarrow \log_7((x-5)(x+1))=\log_7(7)\\
&\underset{\text{log sont bij}}{\overset{\text{car les fct}}{\Leftrightarrow}} (x-5)(x+1)=7\\
&\Leftrightarrow x^2-4x-12=0\\
&\Leftrightarrow (x-6)(x+2)=0\\
x=6 &\text{ ou } x=-2
\end{aligned}$$

$S=\{6\}$, car -2 n'appartient pas au domaine de définition

Modélisation – exemple

Votre ancêtre a placé à la naissance de Jésus Christ deux sesterces sur un compte épargne à 1%. A combien s'élève votre compte en 206 ? Et après combien de temps devient-il milliardaire ?

Après 1 an, le compte a $(2+0{,}01\cdot 2)=2\cdot(1+0{,}01)$ sesterces.
Après 2 ans : $2(1+0{,}01)+0{,}01[2\cdot(1+0{,}01)]=2\cdot(1+0{,}01)[1+0{,}01]=2\cdot(1+0{,}01)^2$
…
Après t ans : $C(t)=2\cdot(1+0{,}01)^t=2\cdot(1{,}01)^t$
En 2016 : $C(2016)=2\cdot(1+0{,}01)^{2016}=2\cdot(1{,}01)^n\overset{C}{=}1030195246$ sesterces !
Pour devenir milliardaire : $C(t)=1000000000=2\cdot(1{,}01)^n$
on résout avec les logarithmes :

$$\begin{aligned}
1000000000=2\cdot(1{,}01)^n &\Leftrightarrow 500000000=(1{,}01)^n\\
&\Leftrightarrow \log(500000000)=\log[(1{,}01)^n]\\
&\Leftrightarrow \log(500000000)=n\cdot\log(1{,}01)\\
&\Leftrightarrow n=\frac{\log(500000000)}{\log(1{,}01)}\simeq 2013{,}01
\end{aligned}$$

Il devient milliardaire un peu après 2013