Exercice 1

(a) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-2}{x+2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$

(b) $\frac{4x^2+8x-12}{x^2-6x+5}=\frac{4(x^2+2x-3)}{(x-1)(x-5)}=\frac{4(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-5)}=\frac{4(x+3)}{x-5}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{1;5\}$

(c) $\frac{u^4-1}{u^3-u}=\frac{(u^2+1)(u^2-1)}{u(u^2-1)}=\frac{(u^2+1)(u+1)(u-1)}{u(u+1)(u-1)}=\frac{u^2+1}{u}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{0;\pm 1\}$

(d) $\frac{y^3+7y^2+6y}{y^2-2y-3}=\frac{y(y^2+7y+6)}{(y-3)(y+1)}=\frac{y(y+6)(y+1)}{(y-3)(y+1)}=\frac{y(y+6)}{y-3}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$

Exercice 2

(a) $\frac{x^4-16}{x+2}\cdot\frac{2}{4x-2x^2}=\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x+2}\cdot\frac{2}{2x(2-x)}=\frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x+2}\cdot\frac{2}{\underbrace{-2x(x-2)}_{(2-x)=-(x-2)}}=-\frac{x^2+4}{x}$

$D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 2;0\}$

(b) $\frac{a^2a^2-25}{16a^3-a}\cdot\frac{4a^2+a}{a^2+5}=\frac{(a^2+5)(a^2-5)}{a(16a^2-1)}\cdot\frac{a(4a+1)}{a^2+5}=\frac{(a^2-5)}{(4a+1)(4a-1)}\cdot(4a+1)=\frac{a^2-5}{4a-1}$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{4};0\right\}$

(c) $\frac{4}{x^2-3x+2}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{4}{(x-2)(x-1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{4(x+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}+\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$
$=\frac{4(x+1)+2(x-2)}{(x-2)(x-1)(x+1)}=\frac{6x}{(x-2)(x-1)(x+1)}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1;2\}$

(d) $\frac{a^2-4}{(4a^2)^2}\div\frac{a+2}{2a}=\frac{(a+2)(a-2)}{(4a^2)^2}\cdot\frac{2a}{a+2}=\frac{(a-2)}{16a^4}\cdot\frac{2a}{1}=\frac{a-2}{8a^3}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$

(e) $\frac{2-3x}{2+3x}-\frac{2+3x}{2-3x}=\frac{(2-3x)(2-3x)}{(2+3x)(2-3x)}-\frac{(2+3x)(2+3x)}{(2-3x)(2+3x)}=\frac{(2-3x)^2-(2+3x)^2}{(2+3x)(2-3x)}$
$=\frac{((2-3x)+(2+3x))((2-3x)-(2+3x))}{(2+3x)(2-3x)}=\frac{(4)(-6x)}{(2+3x)(2-3x)}=\frac{-24x}{(2+3x)(2-3x)}$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{2}{3}\right\}$

(f) $\frac{3}{2z-1}+\frac{8z}{4z^2-1}-\frac{2}{2z+1}=\frac{3}{2z-1}+\frac{8z}{(2z+1)(2z-1)}-\frac{2}{2z+1}=\frac{3(2z+1)+8z-2(2z-1)}{(2z+1)(2z-1)}$
$=\frac{6z+3+8z-4z+2}{(2z+1)(2z-1)}=\frac{10z+5}{(2z+1)(2z-1)}=\frac{5(2z+1)}{(2z+1)(2z-1)}=\frac{5}{2z-1}$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 3

(a) $D=\mathbb{R}\setminus\{5\},\ \frac{x-3}{x-5}=5\Leftrightarrow\frac{x-3}{x-5}-5=0\Leftrightarrow\frac{(x-3)-5(x-5)}{x-5}=0\Leftrightarrow(x-3)-5(x-5)=0\Leftrightarrow x-3-5x+25=0$
$\Leftrightarrow -4x+22=0\Leftrightarrow x=\frac{11}{2}\Leftrightarrow S=\left\{\frac{11}{2}\right\}$

(b) $D=\mathbb{R}\setminus\{5\},\ \frac{t-3}{t-5}=1\Leftrightarrow\frac{t-3}{t-5}-1=0\Leftrightarrow\frac{(t-3)-(t-5)}{t-5}=0\Leftrightarrow(t-3)-(t-5)=0\Leftrightarrow 2=0\Leftrightarrow S=\emptyset$

(c) $D=\mathbb{R}\setminus\{5\},\ \frac{x-3}{x-5}=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3\Leftrightarrow S=\{3\}$

(d) $D=\mathbb{R}\setminus\{5\},\ \frac{15-3x}{x-5}=-3\Leftrightarrow\frac{15-3x}{x-5}+3=0\Leftrightarrow\frac{(15-3x)+3(x-5)}{x-5}=0\Leftrightarrow(15-3x)+3(x-5)=0$
$\Leftrightarrow 0=0$ (donc tout élément de D est solution) $\Leftrightarrow S=\mathbb{R}\setminus\{5\}$

(e) $D=\mathbb{R}\setminus\{5\},\ \frac{x^2-10x+25}{4x-20}-\frac{x-5}{8}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{(x-5)^2}{4(x-5)}-\frac{x-5}{8}-\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow\frac{2(x-5)}{4\cdot 2}-\frac{x-5}{8}-\frac{1}{8}=0$
$\Leftrightarrow\frac{2x-10-(x-5)-1}{8}=0\Leftrightarrow\frac{x-6}{8}=0\Leftrightarrow x=6\Leftrightarrow S=\{6\}$

(f) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\},\ \frac{2+x}{x^2+2x}+\frac{1}{x^2}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\frac{2+x}{x(x+2)}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{9}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{9}=0\Leftrightarrow\frac{9x+9-4x^2}{x^2}=0$
$\Leftrightarrow 9x+9-4x^2=0\Leftrightarrow 4x^2-9x-9=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{225}}{8}\Leftrightarrow x_1=3,\ x_2=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow S=\left\{-\frac{3}{4};3\right\}$

(g) $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$ donc $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;-1\}$,
$\frac{x+1}{2x+4}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2+3x+2}\Leftrightarrow\frac{x+1}{2(x+2)}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+2)(x+1)}=0\Leftrightarrow\frac{(x+1)^2+2(x+2)-2}{2(x+2)(x+1)}=0$
$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2x+4-2=0\Leftrightarrow x^2+4x+3=0\Leftrightarrow(x+1)(x+3)=0\Leftrightarrow S=\{-3\}\quad(-1\notin D)$

(h) $x^2+6x+9=(x+3)^2$ donc $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-\frac{1}{2};2\right\}$
$\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}+\frac{x^2-4}{(2x+1)(x-2)}=1\Leftrightarrow\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2}+\frac{(x+2)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}-1=0$
$\Leftrightarrow\frac{(x-3)}{(x+3)}+\frac{(x+2)}{(2x+1)}-\frac{(x+3)(2x+1)}{(x+3)(2x+1)}=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\frac{(x-3)(2x+1)+(x+2)(x+3)-(x+3)(2x+1)}{(x+3)(2x+1)}=0$
$\Leftrightarrow 2x^2-6x+x-3+x^2+5x+6-(2x^2+x+6x+3)=0\Leftrightarrow x^2-7x=0\Leftrightarrow x(x-7)=0\Leftrightarrow S=\{0;7\}$

Exercice 4

(a) $f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x+1}=\frac{x+1-3(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{-2x+7}{(x-2)(x+1)}$

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$
- $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x+7}{(x-2)(x+1)}=0\Leftrightarrow -2x+7=0\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}\Leftrightarrow Z_f=\left\{\frac{7}{2}\right\}$
- Tableau de signes :

x		-1		2		7/2	
$(-2x+7)$	+	+	+	+	+	0	-
$(x-2)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x+1)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	‖	-	‖	+	0	-

On en déduit les équations des asymptotes verticales : $x=-1$ et $x=2$.

De plus, intuitivement on a : si $x\to-1^-$ alors $f(x)\to+\infty$ et si $x\to2^-$ alors $f(x)\to+\infty$
si $x\to-1^+$ alors $f(x)\to-\infty$ si $x\to2^+$ alors $f(x)\to-\infty$

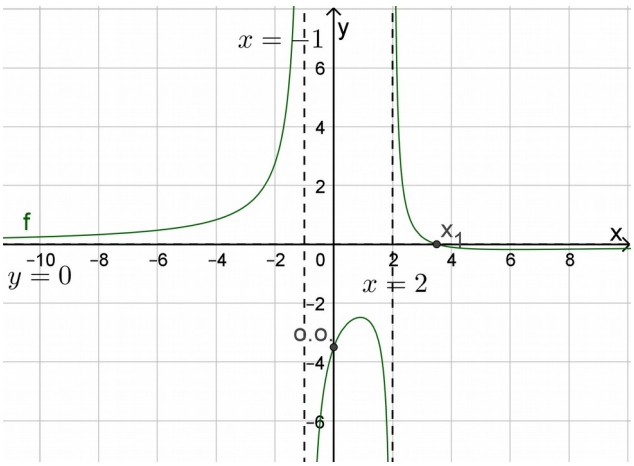
- Asymptote horizontale ?

On compare les degrés du numérateur et du dénominateur [thm p. 94] :

$d°(-2x+7)=1$, $d°((x+1)(x-2))=2$ Comme le degré du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur, $y=0$ est l'équation de l'asymptote horizontale et on a :

si $x\to-\infty$ alors $f(x)\to0$ et si $x\to+\infty$ alors $f(x)\to0$

Remarque : On peut calculer $f(100)\simeq-0.02$, $f(1000)\simeq-0.002$, $f(10000)\simeq-0.0002$ et constater que si x prend des valeurs positives très grandes ($x\to+\infty$) alors les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de 0 ($f(x)\to0$). De même, on peut calculer $f(-100)\simeq0.02$, $f(-1000)\simeq0.002$, $f(-10000)\simeq0.0002$

- 

Afin d'affiner la représentation on calcule l'ordonnée à l'origine ainsi que quelques images supplémentaires :

$f(0)=-\frac{3}{2}$, $f(1)=-\frac{1}{2}$, etc

(b)

$$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+4}-\frac{1}{x^2-7x+10}=\frac{1}{(x-1)(x-4)}-\frac{1}{(x-2)(x-5)}=\frac{(x-2)(x-5)-(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)(x-2)(x-5)}$$

$$=\frac{x^2-7x+4-(x^2-5x+4)}{(x-1)(x-4)(x-2)(x-5)}=\frac{-2x+6}{(x-1)(x-4)(x-2)(x-5)}=\frac{-2(x-3)}{(x-1)(x-4)(x-2)(x-5)}$$

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1;2;4;5\}$
- $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2(x-3)}{(x-1)(x-4)(x-2)(x-5)}=0\Leftrightarrow-2(x-3)=0\Leftrightarrow x=3\Leftrightarrow Z_f=\{3\}$
- Tableau de signes :

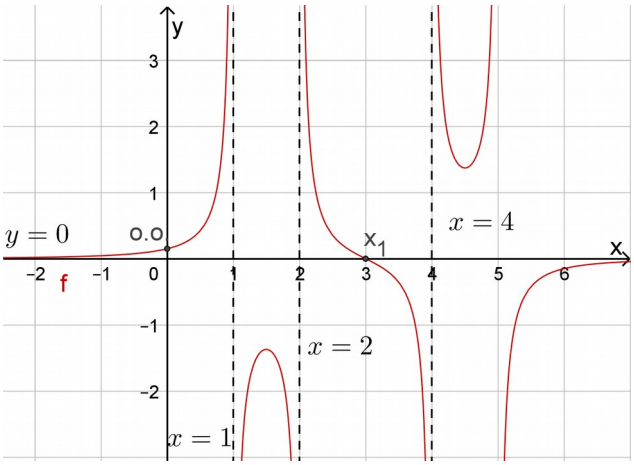
		1		2		3		4		5	
-2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$(x-3)$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$(x-2)$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$(x-4)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(x-5)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+
	+	‖	-	‖	+	0	-	‖	+	‖	-

On en déduit les équations des asymptotes verticales : $x=1$, $x=2$, $x=4$, $x=5$

- Asymptote horizontale ?

On compare les degrés du numérateur et du dénominateur [thm p. 94] :

$d°(n(x))=1$, $d°(d(x))=4$ Comme le degré du dénominateur est strictement plus grand que celui du numérateur, $y=0$ est l'équation de l'asymptote horizontale.

- 

Afin d'affiner la représentation on calcule l'ordonnée à l'origine ainsi que quelques images supplémentaires :

$f(0)=\frac{3}{20}$, $f(1.5)\simeq-1.37$, etc

(c)

$$f(x)=\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}-\frac{5}{2}=\frac{x\cdot 2x-2(x+1)(x+1)-5x(x+1)}{2x(x+1)}=\frac{2x^2+2x^2+4x+2-5x^2-5x}{2x(x+1)}$$

$$=\frac{-x^2-x+2}{2x(x+1)}=\frac{-(x^2+x-2)}{2x(x+1)}=\frac{-(x+2)(x-1)}{2x(x+1)}$$

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$
- $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{-(x+2)(x-1)}{2x(x+1)}=0\Leftrightarrow-(x+2)(x-1)=0\Leftrightarrow Z_f=\{-2;1\}$
- Tableau de signes :

x		-2		-1		0		1	
$-(x+2)$	+	0	-	-	-	-	-	-	-
$(x-1)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$2x$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(x+1)$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
	-	0	+	‖	-	‖	+	0	-

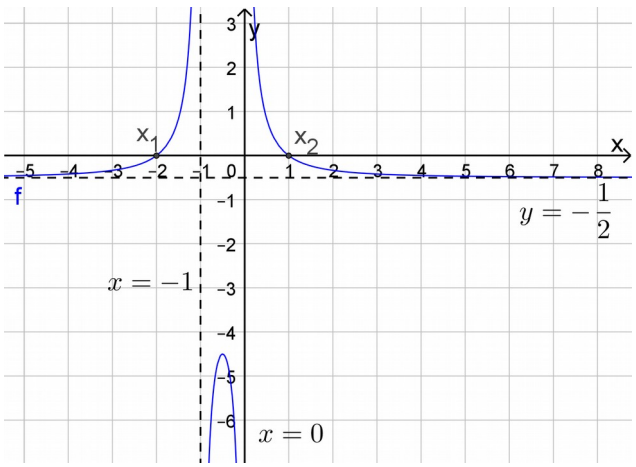
On en déduit les équations des asymptotes verticales : $x=-1$, $x=0$

- Asymptote horizontale ?

On compare les degrés du numérateur et du dénominateur [thm p. 94] :

$d°(n(x))=2$, $d°(d(x))=2$ Comme le degré du dénominateur est égal à celui du numérateur, l'équation de l'asymptote horizontale est donnée par le quotient des coefficients dominants :

$$f(x)=\frac{\mathbf{-1}\cdot x^2-x+2}{\mathbf{2}x^2+2x}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

- 

Afin d'affiner la représentation on calcule quelques images supplémentaires :

$f(-3)\simeq-0.3$, $f(-0.5)=-4.5$, etc

(d) $f(x)=\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{2x-4}{x^2+2x}=\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x}+\frac{2(x-2)}{x(x+2)}=\frac{x\cdot x-(x+2)+2(x-2)}{x(x+2)}=\frac{x^2-x-2+2x-4}{x(x+2)}$
$=\frac{x^2+x-6}{x(x+2)}=\frac{(x+3)(x-2)}{x(x+2)}$

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$
- $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{(x+3)(x-2)}{x(x+2)}=0\Leftrightarrow(x+3)(x-2)=0\Leftrightarrow Z_f=\{-3;2\}$
- Tableau de signes :

x		-3		-2		0		2	
$(x-2)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$(x+3)$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
x	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(x+2)$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	‖	+	‖	-	0	-

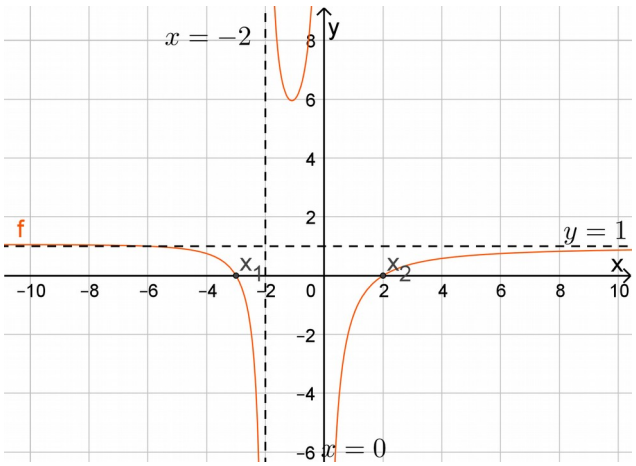
On en déduit les équations des asymptotes verticales : $x=-2$, $x=0$

- Asymptote horizontale ?

On compare les degrés du numérateur et du dénominateur [thm p. 94] :

$d°(n(x))=2$, $d°(d(x))=2$ Comme le degré du dénominateur est égal à celui du numérateur, l'équation de l'asymptote horizontale est donnée par le quotient des coefficients dominants :

$$f(x)=\frac{\mathbf{1}\cdot x^2+x-6}{\mathbf{1}x^2+2x}\Rightarrow y=\frac{1}{1}=1$$

- 

Afin d'affiner la représentation on calcule quelques images supplémentaires :

$f(-1)=6$, $f(1)\simeq-1.3$, etc

Exercice 5

f est définie par $f(x)=\frac{n(x)}{d(x)}$ avec $d(x)=(x-0)(x-4.5)$ pour les asymptotes verticales.

De plus, $d°(n(x))=d°(d(x))=2$ pour l'asymptote horizontale $y\in\mathbb{R}^*$ et le quotient des coefficients dominants de $n(x)$ et $d(x)$ doit être égal à -2. Donc $d(x)=-2x^2+bx+c$.

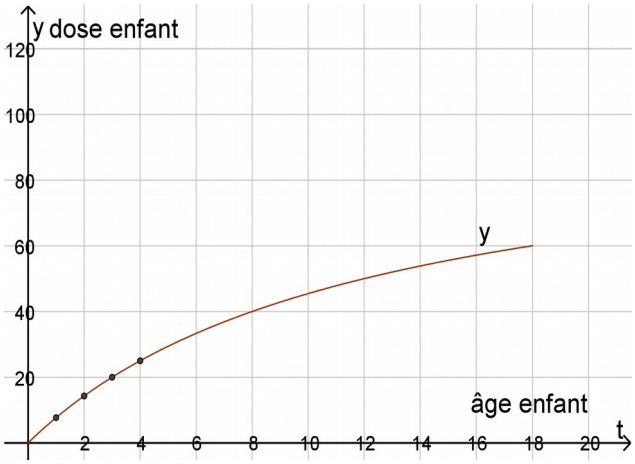
Finalement, on f doit satisfaire $f(2)=0\Leftrightarrow -2\cdot 2^2+b\cdot 2+c=0\Leftrightarrow -8-2b=c$. Cette équation possède une infinité de solutions, par exemple $b=0\Rightarrow c=-8$.

Ainsi, on a par exemple $f(x)=\frac{2x^2-8}{x(x-4.5)}$

Exercice 6

$y=\frac{ta}{t+12}$, $a=100\Rightarrow y=\frac{100t}{t+12}$

On a $y(1)\simeq 7.7$, $y(2)\simeq 14.3$, $y(3)\simeq 20$, $y(4)\simeq 25$



Exercice 7

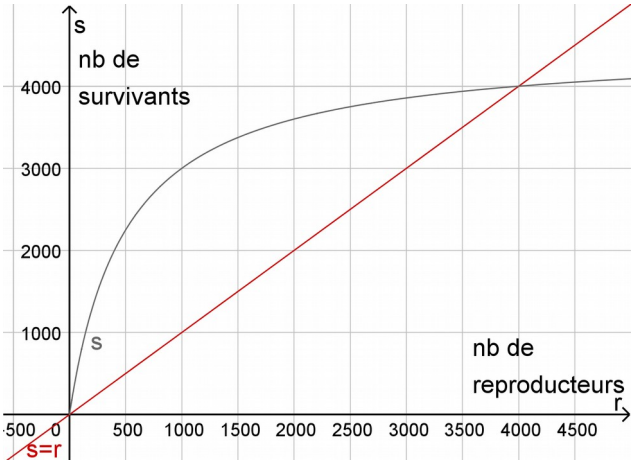
(a) $s=\frac{4500r}{r+500}$

$$s>r \Leftrightarrow \frac{4500r}{r+500}>r \Leftrightarrow \frac{4500r}{r+500}-r>0 \Leftrightarrow \frac{4500r-r(r+500)}{r+500}>0 \Leftrightarrow \frac{4500r-r^2-500r}{r+500}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4000r-r^2}{r+500}>0 \Leftrightarrow \frac{r(4000-r)}{r+500}>0,\quad D=\mathbb{R}\setminus\{-500\},\quad Z_f=\{0;4000\}$$

Tableau de signes :

r		-500		0		4000	
r	-	-	-	0	+	+	+
$(4000-r)$	+	+	+	+	+	0	-
$(r+500)$	-	0	+	+	+	+	+
s	+	‖	-	0	+	0	-



Donc $s>r \Leftrightarrow r\in]0;4000[$

(b)

$$\frac{4500r}{r+500}=90\%r \Leftrightarrow 4500r=\frac{90}{100}r(r+500) \Leftrightarrow 4500r=0.9r^2+450r \Leftrightarrow r(0.9r-4050)=0 \Leftrightarrow$$

$$r_1=0,\quad r_2=\frac{4050}{0.9}=4500$$

(c)

$$\frac{4500r}{r+500}=80\%r \Leftrightarrow 4500r=\frac{80}{100}r(r+500) \Leftrightarrow 4500r=0.8r^2+450r \Leftrightarrow r(0.8r-4100)=0 \Leftrightarrow$$

$$r_1=0,\quad r_2=\frac{4100}{0.8}=5125$$

(d) Lorsque le pourcentage diminue, le nombre de poissons reproducteurs augmente.

L'équilibre est atteint à $s=r=4000$ (voir a)). Si $r<4000$, alors il y a plus de 4000 survivants.

Si $r>4000$, alors il y a moins de 4000 survivants.

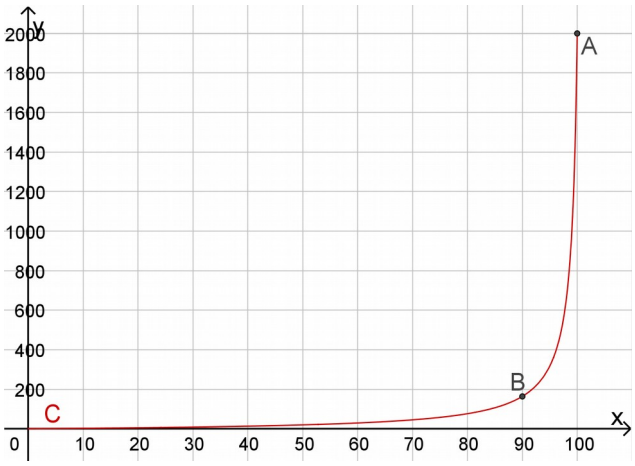
Exercice 8

(a) Et

(b) $C(x)=\frac{20x}{101-x}$

$C(100)=\frac{20\cdot 100}{101-100}=2000,\ C(90)=\frac{20\cdot 90}{101-90}\simeq 164$

On observe $C(100)\gg C(90)$



Exercice 9

$f(x)=\frac{2x-1}{5x-2}$

$h=1:\ f(1)=\frac{2\cdot 1-1}{5\cdot 1-2}=\frac{1}{3}$ et $f(\frac{1}{3})=\frac{2\cdot\frac{1}{3}-1}{5\cdot\frac{1}{3}-2}=\frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}=1$

$h=2:\ f(2)=\frac{2\cdot 2-1}{5\cdot 2-2}=\frac{3}{8}$ et $f(\frac{3}{8})=\frac{2\cdot\frac{3}{8}-1}{5\cdot\frac{3}{8}-2}=\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}}=2$

$h=h:\ f(h)=\frac{2\cdot h-1}{5\cdot h-2}$ et $f\left(\frac{2\cdot h-1}{5\cdot h-2}\right)=\frac{2\cdot\frac{2\cdot h-1}{5\cdot h-2}-1}{5\cdot\frac{2\cdot h-1}{5\cdot h-2}-2}=\frac{\frac{4h-2-(5h-2)}{5h-2}}{\frac{10h-5-2(5h-2)}{5\cdot h-2}}=\frac{4h-2-5h+2}{10h-5-10h+4}=\frac{-h}{-1}=h$

Exercice 10

$\frac{x-1}{x-2}\geq 3$ n'est pas une inéquation équivalente à $x-1\geq 3(x-2)$ bien que chaque membre de l'inéquation ait été multiplié par le même facteur $(x-2)$ car le signe de $(x-2)$ n'est pas connu.

Si $(x-2)<0$ alors le sens de l'inégalité doit être changé.

Par exemple, si $x=2.1$, alors $\frac{2.1-1}{2.1-2}\geq 3\Leftrightarrow\frac{1.1}{0.1}\geq 3\Leftrightarrow 11\geq 3$ ✓ mais

$2.1-1\geq 3(2.1-2)\Leftrightarrow 1.1\geq 3\cdot 0.1\Leftrightarrow 1.1\geq 0.3$ ✗

Exercice 11

(a) $\frac{x^2(x+2)}{(x+2)(x+1)} \leqslant 0 \overset{x\neq -2}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{(x+1)} \leqslant 0$

Tableau de signes :

x		-1		0	
x^2	+	+	+	0	+
$(x+1)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	-	‖	+	0	+

Donc $S=]-\infty;-1[\setminus\{-2\}$

(b) $\frac{x^2-x}{x^2+2x} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x+2)} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{x-1}{x+2}$

Tableau de signes :

x		-2		1	
$(x-1)$	-	-	-	0	+
$(x+2)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	+	‖	-	0	+

Donc $S=]-2;1]\setminus\{0\}$

(c) $\frac{x-2}{x^2-3x-10} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x-5)(x+2)} \geqslant 0$

Tableau de signes :

x		-2		2		5	
$(x-2)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x-5)$	-	-	-	-	-	0	+
$(x+2)$	-	0	+	+	+	+	+
	-	‖	+	0	-	‖	+

Donc $S=]-2;2]\cup]5;+\infty[$

(d) $\frac{1}{x-2} \geqslant \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1(x+1)-3(x-2)}{(x-2)(x+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{(x-2)(x+1)} \geqslant 0$

Tableau de signes :

x		-1		2		7/2	
$(-2x+7)$	+	+	+	+	+	0	-
$(x-2)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x+1)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	‖	-	‖	+	0	-

Donc $S=]-\infty;-1[\cup]2;\frac{7}{2}]$

(e) $\frac{4}{3x-2} \leqslant \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{4}{3x-2} - \frac{2}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+1)-2(3x-2)}{(3x-2)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+8}{(3x-2)(x+1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(-x+4)}{(3x-2)(x+1)} \leqslant 0$

Tableau de signes :

x		-1		2/3		4	
$(-x+4)$	+	+	+	+	+	0	-
$(3x-2)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x+1)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	‖	-	‖	+	0	-

Donc $S=]-1;\frac{2}{3}[\cup[4;+\infty[$

(f) $\frac{3}{3x-5} \leqslant \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{3}{3x-5} - \frac{2}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+7}{(3x-5)(x-1)} \leqslant 0$

Tableau de signes :

x		1		5/3		7/3	
$(-3x+7)$	+	+	+	+	+	0	-
$(3x-5)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x-1)$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	‖	-	‖	+	0	-

Donc $S =]1;\frac{5}{3}[\cup [\frac{7}{3};+\infty[$

Exercice 12

$$D > 400 \Leftrightarrow \frac{5000x}{x^2+36} > 400 \Leftrightarrow \frac{5000x}{x^2+36} - 400 > 0 \Leftrightarrow \frac{5000x - 400(x^2+36)}{x^2+36} > 0 \Leftrightarrow \frac{-400x^2+5000x-14400}{x^2+36} > 0$$

On factorise $-400x^2+5000x-14400$

$$4x^2-50x+144=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{50 \pm 14}{8} \Leftrightarrow x_1 = 8, x_2 = \frac{9}{2}$$

donc $-400x^2+5000x-14400 = -400(x-8)(x-\frac{9}{2})$

Tableau de signes :

		9/2		8	
-400	-	-	-	-	-
$(x-8)$	-	-	-	0	+
$(x-9/2)$	-	0	+	+	+
(x^2+36)	+	+	+	+	+
D	-	0	+	0	-

La population excède 400 pers./km² lorsque la distance du centre ville est comprise entre 4.5 et 8 km.